Grundbegriffe der Mathematischen Logik, Sommersemester 2011
Prüfungsteil I (Rekursionstheorie), Beispielblatt zur Vorbereitung

Name: **Matrikelnummer (leserlich!):**

Ja-Nein-Fragen

*Bitte tragen Sie in die Kästchen **W** (wahr) oder **F** (falsch) ein. Eine richtige Antwort zählt 2 Punkte, eine falsche 0 Punkte. Eine unbeantwortete Frage zählt 1 Punkt, damit Sie im Mittel keinen Nachteil haben, wenn Sie nicht raten.*

1. Ob ein LOOP-Programm anhält, hängt im Allgemeinen von der Eingabe ab. ☐
2. Die durch $f(x) = 7x^3 - 2x + 25$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist primitiv rekursiv. ☐
3. Alle Polynome $p\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit Koeffizienten in $\mathbb{N}$ sind GOTO-berechenbar. ☐
4. Jede Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die höchstens die beiden Werte 0 und 1 annimmt, ist primitiv rekursiv. ☐
5. Jede primitiv rekursive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ lässt sich als Polynom schreiben. ☐
6. Die Funktion $f(x, y) = x \uparrow^7 y$ lässt sich durch ein Polynom $p(x, y)$ nach oben abschätzen. ☐
7. Die Funktion $f(x, y) = 2 \uparrow^x x$ ist LOOP-berechenbar. ☐
8. Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid 19xyz - 24xy - 3yz - 4x - 2 = 0\}$ ist rekursiv. ☐
9. Seien $\alpha\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ und $\beta\colon \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Die Funktion $\gamma\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ mit $\gamma(0, \bar{y}) = \alpha(\bar{y})$ und $\gamma(n + 1, \bar{y}) = \beta(n, \gamma(n, \bar{y}), \bar{y})$ ist rekursiv. ☐
10. Alle rekursiven Mengen $A \subseteq \mathbb{N}^k$ sind rekursiv aufzählbar. ☐
11. Wenn $A \subseteq \mathbb{N}^2$ rekursiv ist, dann auch $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y\colon (x, y) \in A\}$. ☐
12. $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = (x + y)(x + y + 1)/2 + y + 7$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. ☐
13. Es gibt endlich viele rekursiv aufzählbare Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$, die nicht Bilder von rekursiven Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind. ☐
14. Jede rekursiv aufzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv und aufzählbar. ☐
15. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass es eine rekursiv aufzählbare Menge gibt, die nicht rekursiv ist. Ganz analog könnte man auch zeigen: Es gibt keine universelle *rekursive* Menge, d.h. es gibt keine rekursive Menge $U \subseteq N^2$, so dass jede rekursive Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ von der Form $A = \{x \mid (x, c) \in U\}$ für ein $c \in \mathbb{N}$ ist. ☐

Bitte wenden!

Fragen mit offenen Antworten

Jede Frage zählt 2 Punkte. Für partielle oder fast richtige Lösungen gibt es evt. 1 Punkt. Hinweis: In der Prüfung haben Sie keinen Interpreter zum Testen. Überlegen Sie sich bei den LOOP-Programmen zuerst, was die jeweils innerste Schleife tut.

16. Programm 1 ist ein LOOP-Programm. Welche Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet es? .... __________
17. Programm 2 ist ein LOOP-Programm. Welche Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet es? .... __________
18. Programm 3 ist ein GOTO-Programm. Welche partielle Funktion $h\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ berechnet es? __________

Programm 1

```
loop input_1 times {
  output = Inc(output)
  loop input_2 times {
    output = Inc(output)
    input_2 = Dec(input_2)
  }
}
```

Programm 2

```
output = Inc(output)
loop input_1 times {
  x = Val(output)
  output = Zero()
  loop x times {
    loop input_1 times {
      output = Inc(output)
    }
  }
  input_1 = Dec(input_1)
}
```

Programm 3

```
0   true = Inc(true)
1   output = Val(input_1)
2   if output goto 4
3   if true goto 6
4   output = Dec(output)
5   if true goto 5
```

Grundbegriffe der Mathematischen Logik, Sommersemester 2011
Prüfungsteil I (Rekursionstheorie), 4. Mai 2011, 13:00–14:30

Name: **Matrikelnummer (leserlich!):**

Ja-Nein-Fragen

*Bitte tragen Sie in die Kästchen **W** (wahr) oder **F** (falsch) ein. Eine richtige Antwort zählt 2 Punkte, eine falsche 0 Punkte. Eine unbeantwortete Frage zählt 1 Punkt, damit Sie im Mittel keinen Nachteil haben, wenn Sie nicht raten.*

1. Jedes GOTO-Programm mit höchstens 3 Zeilen hält unabhängig von der Eingabe immer an. ☐
2. Die Fibonacci-Funktion $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – definiert durch $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ – ist LOOP-berechenbar. . . . . . . ☐
3. Die Fakultätsfunktion ist primitiv rekursiv. . . . . . . ☐
4. Jede beschränkte rekursive Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist primitiv rekursiv. . . . . . . ☐
5. Primitive Rekursion ist der Spezialfall von μ-Rekursion für primitives μ. . . . . . . ☐
6. Die Zahl $5 \uparrow^1 7$ ist so groß, dass man sie in der Praxis nicht berechnen kann. . . . . . . ☐
7. Die Funktion $f(x) = x \uparrow^4 x$ ist primitiv rekursiv. . . . . . . ☐
8. Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x^2 + y^2 = z!\}$ ist rekursiv. . . . . . . ☐
9. Seien $\alpha\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ und $\beta\colon \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}$ rekursiv. Die Funktion $\gamma\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ mit $\gamma(0, \bar{y}) = \alpha(\bar{y})$ und $\gamma(n + 1, \bar{y}) = \beta(n, \gamma(n, \bar{y}), \bar{y})$ ist primitiv rekursiv. . . . . . . ☐
10. Eine rekursive Menge ist genau dann primitiv rekursiv, wenn ihr Komplement auch rekursiv ist. . . . . . . ☐
11. Wenn $A \subseteq \mathbb{N}^2$ rekursiv aufzählbar ist, dann auch $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y\colon (x, y) \in A\}$. . . . . . . ☐
12. Jede gerade Zahl ist von der Form $(x + y)(x + y + 1) + 2y$, wobei $x, y \in \mathbb{N}$. . . . . . . ☐
13. Fast alle rekursiv aufzählbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ sind Bilder von rekursiven Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. . . . . . . ☐
14. Die charakteristische Funktion einer rekursiv aufzählbaren Menge ist rekursiv. . . . . . . ☐
15. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass es eine rekursiv aufzählbare Menge gibt, die nicht rekursiv ist. Der Beweis benutzt die Tatsache, dass es keine universelle rekursiv aufzählbare Menge gibt. . . . . . . ☐

Bitte wenden!

Fragen mit offenen Antworten

Jede Frage zählt 2 Punkte. Für partielle oder fast richtige Lösungen gibt es evt. 1 Punkt. Hinweis: Überlegen Sie sich bei den LOOP-Programmen zuerst, was die jeweils innerste Schleife tut.

16. Programm 1 ist ein LOOP-Programm. Welche Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ berechnet es? .... __________
17. Programm 2 ist ein LOOP-Programm. Welche Funktion $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet es? .... __________
18. Programm 3 ist ein GOTO-Programm. Welche partielle Funktion $h\colon \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$ berechnet es? __________

Programm 1

```
output = Val(input_3)
loop input_1 times {
  loop input_2 times {
    input_2 = Dec(input_2)
    output = Dec(output)
  }
  output = Dec(output)
}
```

Programm 2

```
output = Val(input_1)
loop input_2 times {
  output = Dec(output)
}
counter = Zero()
counter = Inc(counter)
loop input_2 times {
  counter = Zero()
}
loop counter times {
  output = Val(input_2)
}
```

Programm 3

```
0   output = Zero()
1   x = Val(input_1)
2   y = Val(input_2)
3   output = Inc(output)
4   y = Dec(y)
5   if y goto 3
6   output = Inc(output)
7   x = Dec(x)
8   if x goto 2
9   if output goto 12
10  output = Inc(output)
11  if output goto 10
```

Grundbegriffe der Mathematischen Logik, Sommersemester 2011
Prüfungsteil II (Prädikatenlogik), Beispielblatt zur Vorbereitung

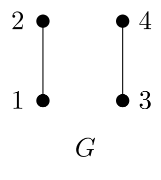
Name: **Matrikelnummer/Studienkennzahl:**

Ja-Nein-Fragen

*Bitte tragen Sie in die Kästchen **W** (wahr) oder **F** (falsch) ein. Eine richtige Antwort zählt 2 Punkte, eine falsche 0 Punkte. Eine unbeantwortete Frage zählt 1 Punkt, damit Sie im Mittel keinen Nachteil haben, wenn Sie nicht raten.*

In den Fragen steht σ für eine beliebige Signatur.
σ_N ist die Signatur mit $\sigma_N^{\mathrm{Op}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{\cdot}\}$, $\sigma_N^{\mathrm{Rel}} = \{\mathtt{<}\}$, wobei $\mathtt{0}$ und $\mathtt{1}$ nullstellig sind und $\mathtt{+}$, $\mathtt{\cdot}$ und $\mathtt{<}$ zweistellig. $\mathbb{N}$ steht sowohl für die natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ als auch für die σ_N-Struktur $(\mathbb{N}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{\cdot}, \mathtt{<})$.
σ_E ist die Signatur mit $\sigma_E^{\mathrm{Op}} = \emptyset$, $\sigma_E^{\mathrm{Rel}} = \{E\}$ und $\mathrm{ar}_E(E) = 2$.

1. Jede σ-Formel ist ein σ-Term. . . . . ☐
2. Wenn t ein σ-Term ist, dann ist $\mathtt{\neg{=}}tt$ eine σ-Formel. . . . . ☐
3. Es gibt eine Signatur σ, so dass $\mathtt{{=}{+}{+}}$ eine σ-Formel ist. . . . . ☐
4. Wenn $\mathtt{\wedge{<}01}$ eine σ-Formel ist, dann ist auch $\mathtt{{=}01}$ eine σ-Formel. . . . . ☐
5. Wenn φ eine (aussagenlogische) Tautologie ist, dann gibt es eine Belegung β der aussagenlogischen Prädikate, so dass $\bar{\beta}(\varphi) = 1$ ist. . . . . ☐
6. $\mathtt{((}\overset{0}{\mathtt{p}}\mathtt{=}\overset{2}{\mathtt{p}}\mathtt{)\vee(}\overset{1}{\mathtt{p}}\mathtt{=}\overset{3}{\mathtt{p}}\mathtt{))}$ ist eine Formel der Aussagenlogik in Infix-Notation. . . . . ☐
7. Jede σ-Theorie erfüllt entweder die Voraussetzungen des Vollständigkeitssatzes oder die Voraussetzungen des Unvollständigkeitssatzes. . . . . ☐
8. Um zu verifizieren, dass eine Formel der Aussagenlogik eine Tautologie ist, muss man unendlich viele Fälle überprüfen. Dieses Problem wird durch den Beweisbarkeitsbegriff und den Vollständigkeitssatz gelöst. . . . . ☐
9. $\mathtt{\neg\wedge{=}}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{1}{\mathtt{v}}\mathtt{\neg{=}}\overset{1}{\mathtt{v}}\overset{0}{\mathtt{v}}$ ist eine Tautologie der Prädikatenlogik 1. Stufe. . . . . ☐
10. Die Formel $\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{0}{\mathtt{v}}$ ist beweisbar. . . . . ☐
11. Die σ_N-Formel $\mathtt{\neg\exists}\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{\exists}\overset{1}{\mathtt{v}}\mathtt{\exists}\overset{2}{\mathtt{v}}\mathtt{\neg{=}{+}}\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{+}\overset{1}{\mathtt{v}}\overset{2}{\mathtt{v}}\mathtt{{+}{+}{+}}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{1}{\mathtt{v}}\overset{2}{\mathtt{v}}$ gilt für die natürlichen Zahlen (d.h. $\mathbb{N} \models \varphi$), ist aber nicht beweisbar. . . . . ☐
12. Die σ_N-Formel $\mathtt{\neg\wedge\exists}\overset{3}{\mathtt{v}}\mathtt{{=}{+}{\cdot}}\overset{3}{\mathtt{v}}\overset{3}{\mathtt{v}}\mathtt{0}\overset{2}{\mathtt{v}}\mathtt{\neg\exists}\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{\exists}\overset{3}{\mathtt{v}}\mathtt{{=}{+}}\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{0}\overset{2}{\mathtt{v}}$ ist beweisbar. . . . . ☐
13. Sei G der unten abgebildete Graph als σ_E-Struktur codiert, d.h. $\underline{G} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathtt{E}^G = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Dann gilt $G \models \mathtt{\exists}\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{\exists}\overset{1}{\mathtt{v}}\mathtt{\exists}\overset{2}{\mathtt{v}}\mathtt{\wedge\wedge E}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{1}{\mathtt{v}}\mathtt{E}\overset{1}{\mathtt{v}}\overset{2}{\mathtt{v}}\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{2}{\mathtt{v}}$. . . . . ☐
14. Sei G der unten abgebildete Graph als σ_E-Struktur codiert, d.h. $\underline{G} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathtt{E}^G = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Dann gilt $G \models \mathtt{\exists}\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{\neg\exists}\overset{1}{\mathtt{v}}\mathtt{\wedge\neg{=}}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{1}{\mathtt{v}}\mathtt{\neg E}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{1}{\mathtt{v}}$. . . . . ☐



G

Bitte wenden!

Fragen mit offenen Antworten

Jede Frage zählt 2 Punkte. Für partielle oder fast richtige Lösungen gibt es evt. 1 Punkt.

15. $\mathtt{(\neg(}\overset{1}{\mathtt{p}}\mathtt{\land(}\overset{2}{\mathtt{p}}\mathtt{\lor(\neg}\overset{3}{\mathtt{p}}\mathtt{))))}$ ist eine Formel der Aussagenlogik in Infix-Notation. Übersetzen Sie sie in eine gleichwertige Formel der Aussagenlogik in polnischer Notation. ....

16. Geben Sie $\varphi[\frac{t}{y}]$ an, falls $\varphi = \exists\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{v}}\overset{0}{\mathtt{v}}$, $t = \mathtt{+}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{1}{\mathtt{v}}$ und $y = \overset{0}{\mathtt{v}}$. ....

17. Beweisen Sie, dass es keine σ-Formel gibt, in der zwei $\mathtt{=}$ direkt hintereinander vorkommen. .

18. Sei σ eine Signatur mit einem einstelligen Operationssymbol $\mathtt{f}$, und sei

$$\varphi = \land\neg\exists\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{f}\overset{0}{\mathtt{v}}\neg\exists\overset{0}{\mathtt{v}}\neg\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\mathtt{ff}\overset{0}{\mathtt{v}}$$

$$\psi = \exists\overset{0}{\mathtt{v}}\exists\overset{1}{\mathtt{v}}\exists\overset{2}{\mathtt{v}}\land\land\neg\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{1}{\mathtt{v}}\neg\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{2}{\mathtt{v}}\neg\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{v}}\overset{2}{\mathtt{v}}$$

$$\chi = \neg\exists\overset{0}{\mathtt{v}}\exists\overset{1}{\mathtt{v}}\exists\overset{2}{\mathtt{v}}\exists\overset{3}{\mathtt{v}}\land\land\land\land\land\neg\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{1}{\mathtt{v}}\neg\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{2}{\mathtt{v}}\neg\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{v}}\overset{3}{\mathtt{v}}\neg\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{v}}\overset{2}{\mathtt{v}}\neg\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{v}}\overset{3}{\mathtt{v}}\neg\mathtt{=}\overset{2}{\mathtt{v}}\overset{3}{\mathtt{v}}.$$

Beweisen Sie, dass der σ-Satz $\neg\land\land\varphi\psi\chi$ beweisbar ist. (Hinweis: Überlegen Sie sich, was Sie jeweils über ein Modell $M \models \varphi$, $M \models \psi$ und $M \models \chi$ sagen können.) ....

Grundbegriffe der Mathematischen Logik, Sommersemester 2011
Prüfungsteil II (Prädikatenlogik), 22. Juni 2011, 13:00–14:30

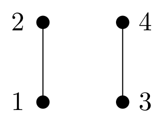
Name: **Matrikelnummer/Studienkennzahl:**

Ja-Nein-Fragen

*Bitte tragen Sie in die Kästchen **W** (wahr) oder **F** (falsch) ein. Eine richtige Antwort zählt 2 Punkte, eine falsche 0 Punkte. Eine unbeantwortete Frage zählt 1 Punkt, damit Sie im Mittel keinen Nachteil haben, wenn Sie nicht raten.*

In den Fragen steht σ für eine beliebige Signatur.
σ_N ist die Signatur mit $\sigma_N^{\mathrm{Op}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{\cdot}\}$, $\sigma_N^{\mathrm{Rel}} = \{\mathtt{<}\}$, wobei $\mathtt{0}$ und $\mathtt{1}$ nullstellig sind und $\mathtt{+}$, $\mathtt{\cdot}$ und $\mathtt{<}$ zweistellig. $\mathbb{N}$ steht sowohl für die natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ als auch für die σ_N-Struktur $(\mathbb{N}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{\cdot}, \mathtt{<})$.
σ_E ist die Signatur mit $\sigma_E^{\mathrm{Op}} = \emptyset$, $\sigma_E^{\mathrm{Rel}} = \{E\}$ und $\mathrm{ar}_E(E) = 2$.

1. Wenn σ eine Signatur ohne Relationssymbole ist, ist jeder σ-Term eine σ-Formel. ....
2. Es gibt eine Signatur σ, so dass $\mathtt{\neg\wedge++}$ eine σ-Formel ist. ....
3. Wenn t ein σ-Term ist, dann ist $\mathtt{\wedge}tt$ eine σ-Formel. ....
4. Wenn $\mathtt{\wedge{=}01}$ eine σ-Formel ist, dann ist auch $\mathtt{==}$ eine σ-Formel. ....
5. Es gibt eine aussagenlogische Tautologie φ und eine Belegung β der aussagenlogischen Prädikate, so dass $\bar{\beta}(\varphi) = 0$ ist. ....
6. $\mathtt{(\exists\overset{0}{p}(\overset{0}{p}\vee\overset{1}{p}))}$ ist eine Formel der Aussagenlogik in polnischer Notation. ....
7. Aus dem Unvollständigkeitssatz folgt, dass es einen σ_N-Satz φ gibt, so dass weder $\mathbb{N} \models \varphi$ noch $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ gilt. ....
8. Ob eine Formel der Aussagenlogik eine Tautologie ist, kann man durch endliche Fallunterscheidung und Einsetzen überprüfen. ....
9. Die σ-Formel $\mathtt{\neg\wedge{=}\overset{0}{x}\overset{1}{x}\neg{=}\overset{0}{x}\overset{1}{x}}$ ist eine Tautologie der Prädikatenlogik 1. Stufe. ....
10. Die σ-Formel $\mathtt{\neg\wedge{=}\overset{0}{x}\overset{1}{x}\neg{=}\overset{1}{x}\overset{0}{x}}$ ist ein Gleichheitsaxiom. ....
11. Die σ_N-Formel $\mathtt{=+1+11++111}$ ist beweisbar. ....
12. Die σ_N-Formel $\mathtt{\neg\wedge{=}\overset{2}{x}{+}{\cdot}\overset{1}{x}\overset{1}{x}\overset{1}{x}\neg\exists\overset{3}{x}{=}\overset{2}{x}{+}\overset{3}{x}\overset{1}{x}}$ ist beweisbar. ....
13. Sei G der unten abgebildete Graph als σ_E-Struktur codiert, d.h. $\underline{G} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathsf{E}^G = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$. Dann gilt $G \models \mathtt{\neg\exists\overset{0}{x}\exists\overset{1}{x}\exists\overset{2}{x}\wedge E\overset{0}{x}\overset{1}{x}E\overset{1}{x}\overset{2}{x}}$. ....
14. Sei G der unten abgebildete Graph als σ_E-Struktur codiert, d.h. $\underline{G} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathsf{E}^G = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$. Dann gilt $G \models \mathtt{\exists\overset{0}{x}\neg\exists\overset{1}{x}E\overset{0}{x}\overset{1}{x}}$. ....



G

Bitte wenden!

Fragen mit offenen Antworten

Jede Frage zählt 2 Punkte. Für partielle oder fast richtige Lösungen gibt es evt. 1 Punkt.

15. $\neg\wedge\overset{1}{\mathtt{p}}\vee\overset{2}{\mathtt{p}}\neg\overset{3}{\mathtt{p}}$ ist eine Formel der Aussagenlogik in polnischer Notation. Übersetzen Sie sie in eine gleichwertige Formel der Aussagenlogik in Infix-Notation. . . . .

16. Geben Sie $\varphi[\frac{t}{y}]$ an, falls $\varphi = \exists\overset{1}{\mathtt{x}}{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}$, $t = {+}\overset{2}{\mathtt{x}}\overset{3}{\mathtt{x}}$ und $y = \overset{0}{\mathtt{x}}$. . . . .

17. Geben Sie eine Signatur σ an, so dass $\mathtt{42}$ (eine Zeichenkette der Länge 2!) eine σ-Formel ist.

18. Sei σ eine Signatur mit einem einstelligen Operationssymbol $\mathtt{f}$, und sei

$$\varphi = \neg\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\exists\overset{1}{\mathtt{x}}\wedge{=}\mathtt{f}\overset{0}{\mathtt{x}}\mathtt{f}\overset{1}{\mathtt{x}}\neg{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}$$

$$\psi = \exists\overset{1}{\mathtt{x}}\neg\exists\overset{0}{\mathtt{x}}{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\mathtt{f}\overset{0}{\mathtt{x}}$$

Beweisen Sie, dass die Grundmenge $\underline{M}$ jedes Modells $M \models \wedge\varphi\psi$ mindestens 7 Elemente enthält.

(Druckfehler in Aufgabe 18 nachträglich korrigiert. Der zweite Existenzquantor in φ fehlte.)