Einführung in die Mathematische Logik

Hans Adler
Kurt Gödel Research Center
Wien

2. Februar 2010

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einführung

Was ist mathematische Logik überhaupt? Und was ist Logik?

Die Logik ist ein wissenschaftliches Gebiet im Grenzbereich von Philosophie, Mathematik und Informatik. Ihr Ursprung lag in der Philosophie; beispielsweise schrieb Aristoteles über die Lehre vom richtigen Schließen und stellte insbesondere einen einflussreichen Katalog von *Syllogismen* auf. Bei diesen ging es um Aussagen der folgenden Formen, die sogenannten *kategorischen Urteile*:

- *Alle A sind B.*
- *Einige A sind B.*
- *Kein A ist B.*
- *Einige A sind nicht B.*

Er untersuchte jede mögliche Kombination bestehend aus zwei solchen kategorischen Urteilen als Prämissen und einem weiteren als Konklusion:

1. Prämisse:	Alle Minister sind Politiker.
2. Prämisse:	Einige Politiker sind kriminell.
Konklusion:	Einige Minister sind kriminell.

1. Prämisse:	Alle Tiere sind Bäume.
2. Prämisse:	Einige Hunde sind keine Bäume.
Konklusion:	Einige Hunde sind keine Tiere.

Eine solche Schlussfolgerung mit zwei Prämissen und einer Konklusion heißt Syllogismus, falls in ihr drei Eigenschaften jeweils genau zweimal vorkommen, aber nie im selben kategorischen Urteil.[1] Ein Syllogismus heißt *gültig*, falls allein aus formellen Gründen bereits feststeht, dass die Konklusion wahr ist wann immer die beiden Prämissen wahr sind. Die Beispiele zeigen, dass wir uns leicht von den Wahrheitswerten der einzelnen kategorischen Urteile ablenken lassen. So ist der erste, ungültige, Syllogismus durchaus überzeugend, während der zweite, gültige, evt. Widerspruch hervorruft. Die Logik lehrte also ursprünglich das korrekte Argumentieren in einer ähnlichen Weise, wie die Rhetorik das überzeugende Argumentieren lehrt.

Die Beschränkung nur auf kategorische Aussagen ist natürlich eine recht starke Einschränkung. Aus heutiger Sicht scheint eine andere, ähnlich starke Einschränkung natürlicher: Eine *Aussage* ist eine Behauptung, die (in einem gegebenen Kontext) entweder wahr oder falsch sein muss. Also beispielsweise „Es regnet.“, aber z.B. keine Aufforderungen („Komm jetzt endlich!“) oder Fragen („Was soll das überhaupt?“) Dabei werden Probleme in Bezug auf die genaue Interpretation der Wörter in Grenzfällen (bis zu welchem Punkt ist Schneeregen noch „Regen“?) üblicherweise ignoriert. Durch *Negation* (Verneinung) einer Aussage, oder durch Verknüpfung von zwei Aussagen mit einer *Konjunktion (und)* oder einer *Disjunktion (oder)*, können wir neue, zusammengesetzte Aussagen erzeugen. Aussagen der Form „Wenn A, dann B.“ können wir als „B oder nicht A“ ausdrücken. Analog zu Aristoteles' Syllogismen können wir nun Schlüsse wie den folgenden auf ihre Gültigkeit untersuchen:

1. Prämisse:	Wenn es regnet, wird die Straße nass.
2. Prämisse:	Die Straße wird nicht nass.
Konklusion:	Es regnet nicht.

Logik = Syntax + Semantik

Aus mathematischer Sicht ist die Aussagenlogik im Wesentlichen nur eine andere Sichtweise der *Booleschen Algebra*, die sowohl zur reinen Mathematik als auch zur Informatik und digitalen Elektronik gehört. Allerdings ist die Aussagenlogik eine spezifisch *logische* Sicht auf die Boolesche Algebra, charakterisiert durch die typische Aufteilung in *Syntax* und *Semantik*. Auf der Seite der Syntax haben wir aussagenlogische Atome, die üblicherweise *aussagenlogische Variable* genannt werden, obwohl wir sie (je nach Standpunkt) mit gleichem Recht auch *aussagenlogische Konstanten* nennen können. Diese Atome werden durch *Symbole* wie z.B. Buchstaben repräsentiert. Ein Vorrat von *logischen Symbolen* wie z.B. $\neg$ für die Negation oder $\wedge$ für die Konjunktion erlaubt es uns, aus den Atomen weitere Aussagen zusammenzusetzen wie z.B. $(A \wedge (\neg B))$. Diese zusammengesetzten Aussagen sind aus der Sicht der Syntax einfach nur *Zeichenketten* (auf Englisch und in der Computersprache *Strings*). Wenn wir nun die Atome mit einer Bedeutung versehen (A bedeutet, dass es regnet; B bedeutet, dass

[1] Genauer: Das erste kategorische Urteil verknüpft zwei Eigenschaften A und B in beliebiger Reihenfolge, z.B. „Alle A sind B.“ oder „Kein B ist A.“ Das zweite verknüpft zwei Eigenschaften B und C, und die Konklusion verknüpft A und C, jeweils wiederum in beliebiger Reihenfolge.

ich den Regenschirm dabei habe), dann erhalten auch die zusammengesetzten Zeichenketten eine Bedeutung.

Durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entstand unter den Mathematikern erstmals ein Bewusstsein, dass ein Axiomensystem auch unbeabsichtigte Modelle (*Nicht-Standard-Modelle*) haben kann. Rein formales Schließen aus den Axiomen gewann dadurch an Bedeutung. In den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts verschärfte sich die Situation durch die Entdeckung der *Russelschen Antinomie*: Die naive Mengenlehre ist widersprüchlich, wie man leicht einsieht, indem man die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, betrachtet: $\{x \mid x \notin x\}$. Unsere heutige Lösung ist, dass diese „Menge" eben keine Menge ist sondern eine Klasse. (In der naiven Mengenlehre gibt es diese Unterscheidung nicht, und alle Mengen sind Klassen.) Aber was garantiert uns, dass wir damit alle Widersprüche beseitigt haben? Bertrand Russell und Alfred North Whitehead machten sich auf, mit den *Principia Mathematica* eine vollständige und solide Grundlage für die gesamte Mathematik zu legen.

Dazu brauchten sie zunächst einmal eine Logik, die ausdrucksstärker ist als die Aussagenlogik. Die Logik, die sie benutzten, ist als das „System der Principia Mathematica" bekannt. Sie ist im Wesentlichen identisch mit der *Prädikatenlogik erster Stufe*, die heute im Allgemeinen als die Logik der Wahl für die Grundlagen der Mathematik gilt. Die Syntax dieser Logik enthält Zeichenketten wie $\forall\epsilon(\epsilon > 0 \to \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall v(|x-v| < \delta \to |f(x)-f(v)| < \epsilon)))$. Um die Semantik festzulegen, muss man u.A. sagen, in welcher Menge die Variablen ihre Werte annehmen dürfen, z.B. in den reellen Zahlen.

Eine vollständige und solide Grundlage der Mathematik sollte insbesondere folgende Eigenschaften haben:

- Sie sollte ein Axiomensystem vollständig beschreiben, z.B. indem sie eine Vorschrift angibt, die alle Axiome erzeugt. (Also z.B. endlich viele einzelne Axiome und dazu endlich viele Axiomenschemata.)

- Das Axiomensystem muss konsistent sein. D.h. es muss auch (‚falsche') Aussagen geben, die nicht aus den Axiomen folgen. (Andernfalls könnte es wohl kaum ein Modell haben.)

- Es muss zumindest die Zahlentheorie vollständig abgedeckt sein. D.h., jede Aussage, die man in der Logik der ersten Stufe über die natürlichen Zahlen und ihre Addition, Multiplikation und lineare Ordnung treffen kann, muss ausdrückbar sein, und, falls sie wahr ist, aus den Axiomen folgen.

Beim Versuch, dieses Problem zu lösen, entstand allmählich der Eindruck, dass es vielleicht nicht geht. Der erste, dem es gelang, diese Unmöglichkeit zu beweisen, war Kurt Gödel. Die Idee für seinen *Unvollständigkeitssatz* ist wie folgt: Angenommen, es gäbe eine vollständige und solide Grundlage der Mathematik wie oben beschrieben. Die Zeichenketten der benutzten Logik ließen sich dann als natürliche Zahlen codieren. Die Definition des Axiomensystems ließe sich in eine Formel übersetzen, welche die entsprechenden Codes für die Axiome beschreibt. Letztlich ließe sich rein zahlentheoretisch ausdrücken: „Die Zahl n ist der Code für eine Zeichenkette, die einen Satz darstellt, der aus den Axiomen folgt.“. Nennen wir diese Aussage $\varphi(n)$. Gödel gelang es, zu zeigen, dass es dann eine natürliche Zahl n geben muss mit der Eigenschaft, dass n der Code für den Satz $\neg\varphi(n)$ ist. Damit haben wir ein Analogon zur Russelschen Antinomie: Falls $\neg\varphi(n)$ gilt, dann folgt der von n codierte Satz (wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit) aus den Axiomen. D.h., es gilt $\varphi(n)$, ein Widerspruch. Falls umgekehrt $\varphi(n)$ gilt, dann folgt der von n codierte Satz natürlich nicht aus den Axiomen. D.h., es gilt $\neg\varphi(n)$, ein erneuter Widerspruch.

Gödel war nicht nur der bedeutendste Logiker des 20. Jahrhunderts; er war auch wahnsinnig. Von Alfred Tarski, dem er mit dem Unvollständigkeitssatz zuvor kam, ist die unbescheidene Bemerkung überliefert, er selbst sei ‘the greatest living sane logician’. Man sagt der Logik nach, sie hätte viele Mathematiker in den Wahnsinn getrieben. (Eine deutsche Illustrierte enthielt einst einen mehrseitigen Artikel mit dem Titel „Gehen Sie der Logik aus dem Weg!“) Falls das wahr ist, ist es wohl vor allem die Schuld des Unvollständigkeitssatzes und verwandter Probleme. Wir werden den Satz daher nur so weit behandeln, dass Sie wissen, wovor Sie sich in Acht nehmen müssen.

Gödel wurde 1906 in Brünn geboren. Da er kaum Tschechisch sprach, fühlte er sich in der 1918 gegründeten Tschechoslowakischen Republik nicht wohl und wurde Österreicher. Er studierte in Wien zunächst Theoretische Physik, beschäftigte sich aber gleich auch mit Philosophie und Zahlentheorie. Obwohl er kein Jude war, war er gelegentlich vom Antisemitismus betroffen. Als er dann auch noch trotz seiner schweren psychischen Probleme zur Wehrmacht eingezogen werden sollte, wanderte er 1940 in die USA aus, wo er einige Jahre später eingebürgert wurde. Er unterstützte Albert Einstein bei mathematischen Problemen der Relativitätstheorie und entdeckte Lösungen von Einsteins Gleichungen, die Zeitreisen ermöglichen würden. 1978 starb er nach langer Krankheitsgeschichte durch Unterernährung in Folge krankhafter Angst vor Vergiftung.

1.2 Logiken

In gewissem Sinne ist dieses Kapitel noch Teil der Einführung. Wir werden eine konkrete Logik im Detail besprechen, aber nur, um den Eindruck zu vermeiden, dass Aussagenlogik und Prädikatenlogik die einzigen sinnvollen Logiken sind, und um den Blick für gewisse Probleme zu schärfen.

Eine *Zeichenkette* über einer Menge A ist ein endliches Tupel (eine endliche Folge) von Elementen aus A. Zeichenketten werden auch als *Wörter* oder *Strings* bezeichnet. Die Menge aller Zeichenketten über A, einschließlich der leeren Zeichenkette (mit Länge 0), wird mit A^* bezeichnet. Eine *formale Sprache* über einer Menge A ist ein Paar (L, A), bestehend aus einer Menge A und einer Menge $L \subseteq A^*$ von Zeichenketten über A. A heißt das *Alphabet* der Sprache. Meist identifiziert man (L, A) mit L, spricht also vom Alphabet von L, obwohl streng genommen A durch L nicht eindeutig bestimmt ist. Man kann das auch so ausdrücken: Eine formale Sprache ist eine Menge L von Zeichenketten über einer Menge A, und ist zusätzlich noch mit A, ihrem Alphabet, versehen.

Zum Beispiel ist die Menge

$$L_\pi = \{\texttt{"3"}, \texttt{"3,1"}, \texttt{"3,14"}, \texttt{"3,142"}, \texttt{"3,1416"}, \texttt{"3,14159"}, \texttt{"3,141593"}, \dots\}$$

von Approximationen von π in Dezimalbruchschreibweise eine formale Sprache über dem Alphabet

$$A = \{\texttt{,}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{-}\}.$$

(Die *Menge* L könnte man natürlich ebensogut als Sprache über dem Alphabet $A' = A \setminus \{\texttt{-}\}$ auffassen. Die beiden formalen Sprachen sind dann allerdings streng genommen verschieden, weil sie nicht dasselbe Alphabet haben.)

Formale Sprachen treten in der Logik immer wieder im Zusammenhang mit der Syntax von Logiken auf. Wirklich zentral sind sie jedoch in der Linguistik (Noam Chomskys Hierarchive der formalen Grammatiken) und der theoretischen Informatik.

In dieser Vorlesung[2] definieren wir Logiken als mathematische Objekte wie folgt: Eine *Logikinstanz* ist ein Tripel $\mathcal{L} = (L, \mathcal{M}, \models)$ bestehend aus einer formalen Sprache L, einer Menge (oder Klasse) $\mathcal{M}$ und einer Relation $\models$ zwischen $\mathcal{M}$ und L, d.h. $\models \subseteq \mathcal{M} \times L$. L heißt die Sprache von $\mathcal{L}$; ihre Elemente heißen *Sätze*. Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen die *Modelle* oder *Interpretationen* für $\mathcal{L}$. Falls $M \in \mathcal{M}$ ein Modell für $\mathcal{L}$ ist und $\varphi \in L$ ein Satz von $\mathcal{L}$, dann schreiben wir $M \models \varphi$ falls $(M, \varphi) \in \models$, und sonst $M \not\models \varphi$. Die Relation $\models$ heißt übrigens *Modellrelation*.

Wir können die Formale Sprache L_π beispielsweise zu einer Logik machen, indem wir $\mathcal{M}_\pi = \mathbb{N}$ setzen und als $\models_\pi$ die Menge aller Paare $(n, \varphi) \in L_\pi \times \mathbb{N}$ wählen, so dass n die Zahl der Zeichen hinter dem Komma ist (bzw. 0 falls φ kein Komma enthält).[3] Also z.B. $2 \models \texttt{3,14}$, aber $0 \not\models \texttt{3,14159}$.

Eine *Logik* ist (in dieser Vorlesung) ein Paar $(S, \mathcal{L})$ bestehend aus einer Menge (oder Klasse) S und einer Funktion $\mathcal{L}$, die jedem Element $\sigma \in S$ eine Logikinstanz $\mathcal{L}_\sigma$ zuordnet. Die Elemente von S heißen die *Signaturen* für die Logik $\mathcal{L}$. Auch wenn wir formal mit Logiken arbeiten, werden wir natürlich meist auf der Ebene der Logikinstanzen denken: Es macht meist keinen Unterschied, wenn wir uns die Signatur als konstant vorgegeben vorstellen.

Wir setzen unser sinnloses Beispiel fort. Analog zu $\mathcal{L}_\pi$ können wir für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine formale Sprache L_x definieren, z.B.:

$$L_{\frac{1}{4}} = \{\texttt{"0"}, \texttt{"0,3"}, \texttt{"0,25"}, \texttt{"0,250"}, \texttt{"0,2500"}, \texttt{"0,25000"}, \texttt{"0,250000"}, \dots\}$$

[2] Obwohl in der Logik immer wieder von „Logiken“ die Rede ist, ist es noch kaum üblich, Logiken als mathematische Objekte zu betrachten, und es gibt keine einheitliche Definition von „Logiken“. Das geht so weit, dass die Semantik einer Logik manchmal als Teil der betreffenden Logik aufgefasst wird und manchmal als zusätzliche Information, die eigentlich nicht dazugehört. Die folgende Definition ist eine vereinfachte Fassung von Definitionen, die gelegentlich in der abstrakten Logik und der institutionellen Modelltheorie verwendet werden.

[3] In der Logik wird die Zahl 0 generell als eine natürliche Zahl angesehen. Wir werden hier, anders als sonst in der Logik üblich, $\mathbb{N}$ und nicht ω für die Menge der natürlichen Zahlen schreiben. Also $0 \in \mathbb{N}$.

$$L_{-10} = \{\texttt{"-10"}, \texttt{"-10,0"}, \texttt{"-10,00"}, \texttt{"-10,000"}, \texttt{"-10,0000"}, \dots\}.$$

Sei außerdem $\mathcal{M}_x = \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und sei $\models_x$ analog zu $\models_\pi$ definiert. Dann sind die Tupel $\mathcal{L}_x = (L_x, \mathcal{M}_x, \models_x)$ Logikinstanzen, und $\mathcal{L}$ ist eine Logik.

Wir kommen nun zu einem sinnvolleren Beispiel. Sei S die Klasse aller Mengen. Für jede Menge $\sigma \in S$ definieren wir eine Logikinstanz $\mathcal{L}_\sigma = (L_\sigma, \mathcal{M}_\sigma, \models)$ wie folgt:

Sei $A_\sigma = \{\texttt{A}, \texttt{E}, \texttt{I}, \texttt{O}\} \cup \sigma$ und $L_\sigma = \{\texttt{A}, \texttt{E}, \texttt{I}, \texttt{O}\} \times \sigma \times \sigma$. Das heißt, alle Zeichenketten in L_σ haben die Länge 3 und sind von der Form "$\texttt{A}\ ab$", "$\texttt{E}\ ab$", "$\texttt{I}\ ab$" oder "$\texttt{O}\ ab$", wobei $a, b \in \sigma$ Elemente von σ sind. Als Modelle für $\mathcal{L}_\sigma$ nehmen wir alle Abbildungen $\sigma \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, d.h. wir setzen $\mathcal{M}_\sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})^\sigma$. Die Modellrelation $\models_\sigma$ definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
M \models_\sigma \texttt{A}ab &\iff M(a) \subseteq M(b) \\
M \models_\sigma \texttt{E}ab &\iff M(a) \cap M(b) = \emptyset \\
M \models_\sigma \texttt{I}ab &\iff M(a) \cap M(b) \neq \emptyset \\
M \models_\sigma \texttt{O}ab &\iff M(b) \not\subseteq M(a).
\end{aligned}$$

Die so definierte Logik $\mathcal{L}$ ist die Logik der kategorischen Urteile im Sinne von Aristoteles. Die Elemente einer Signatur σ repräsentieren die Prädikate (z.B. „ist ein Minister“, „ist kriminell“). Ein Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ gibt für jedes Prädikat $a \in \sigma$ an, welche natürlichen Zahlen (die hier stellvertretend für beliebige Objekte stehen) dieses Prädikat erfüllen. Diese bilden die Menge $M(a)$. Die Sätze (= Wörter) der Sprache L_σ sind die kategorischen Urteile, und $M \models_\sigma \varphi$ bedeutet, dass das kategorische Urteil φ im Modell M zutreffend ist.

Die Syllogismen sind nun die Tripel $(\varphi_1, \varphi_2, \psi) \in L_\sigma^3$, welche die im letzten Kapitel angegebene Einschränkung bezüglich des Vorkommens von Prädikaten erfüllen. Genauer, die Menge aller Syllogismen zur Signatur σ ist die Menge

$$\begin{aligned}
\big\{(Xab, Ybc, Zac), (Xab, Ybc, Zac),& \\
(Xab, Ycb, Zac), (Xab, Ycb, Zac),& \\
(Xab, Ybc, Zca), (Xab, Ybc, Zca),& \\
(Xab, Ycb, Zca), (Xab, Ycb, Zca)& \\
\Big|\ X, Y, Z \in \{\texttt{A}, \texttt{E}, \texttt{I}, \texttt{O}\},\ a, b, c \in \sigma\big\}&
\end{aligned}$$

Ein Syllogismus $(\varphi_1, \varphi_2, \psi) \in L_\sigma^3$ ist gültig, falls für *jedes* Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ gilt: Falls $M \models_\sigma \varphi_1$ und $M \models_\sigma \varphi_2$, so auch $M \models_\sigma \psi$.

Die gültigen Syllogismen liefern unser erstes Beispiel für einen *logischen Kalkül.* Wir beginnen mit einer grundlegenden Definition, die auf Kuratowski und Tarski zurückgeht:

Ein *Hüllenoperator* auf einer Menge X ist ein extensiver, monotoner, idempotenter Operator auf X. Mit anderen Worten, man versteht darunter eine Abbildung $h\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ (die also jeder Teilmenge von X eine Teilmenge von X zuordnet), welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

Extensivität $A \subseteq h(A)$

Monotonie $A \subseteq B \implies h(A) \subseteq h(B)$

Idempotenz $h(h(A)) = h(A)$.

Dieser Begriff wurde etwa gleichzeitig (und am selben Ort, der Universität Warschau) von Kuratowski eingeführt, um die topologische Hülle in allgemeinen topologischen Räumen zu axiomatisieren, und von Tarski, um logische Konsequenz abstrakt zu beschreiben. Bei Kuratowski kam dementsprechend noch das Axiom $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$ hinzu. Tarski dagegen interessierte sich vor allem für *finitäre Hüllenoperatoren*, das heißt solche, für die $h(A)$ die Vereinigung der Mengen $h(A')$ für alle endlichen Teilmengen $A' \subseteq A$ ist.

Ein logischer Kalkül (im weitesten Sinne) für eine Logik $\mathcal{L}$ ist nun eine Funktion K, die uns für jede Signatur σ von $\mathcal{L}$ einen Hüllenoperator K_σ auf der formalen Sprache L_σ liefert. Der wichtigste logische Kalkül ist der von der Semantik induzierte: Wir sagen, dass ein Satz $\psi \in L_\sigma$ aus einer Menge $\Phi \subseteq L_\sigma$ von Sätzen semantisch folgt, falls jedes Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$, das alle Sätze in Φ erfüllt, auch ψ erfüllt:

$$M \models_\sigma \Phi \implies M \models_\sigma \psi.$$

In diesem Fall schreiben wir $\Phi \models_\sigma \psi$. Wir können nun leicht überprüfen, dass $K_\sigma(\Phi) = \{\psi \in L_\sigma \mid \Phi \models_\sigma \psi\}$ einen Hüllenoperator definiert.

Die drei wichtigsten Eigenschaften, die man sich von einem beliebigen logischen Kalkül wünscht, sind die folgenden:

- Er muss korrekt sein, d.h. wenn $\psi \in K_\sigma(\Phi)$ ist, dann soll auch $\Phi \models_\sigma \psi$ gelten.
- Er sollte vollständig sein, d.h. wenn $\Phi \models_\sigma \psi$, dann sollte auch $\psi \in K_\sigma(\Phi)$ sein.
- Er sollte finitär sein.

Die semantische Konsequenz ist natürlich immer korrekt und vollständig. Sie muss aber nicht immer finitär sein – obwohl sie es meist ist. Da die semantische Konsequenz nicht leicht zu überprüfen ist, hat schon Aristoteles mit einem Katalog von als gültig angesehenen Schlüssen gearbeitet:

$$\{\mathtt{A}ba, \mathtt{A}cb\} \models \mathtt{A}ca,$$
$$\{\mathtt{E}ba, \mathtt{A}cb\} \models \mathtt{E}ca,$$
$$\ldots$$

Zum Abschluss unserer Beschäftigung mit der Antike drei Übungsaufgaben:

- Gegeben (für jede Signatur) eine Menge von Syllogismen. Wie können wir daraus sinnvoll einen logischen Kalkül definieren, d.h. für jede Signatur σ einen Hüllenoperator K_σ auf L_σ?

- Der so gewonnene Kalkül muss finitär sein.
- Die Menge der laut Aristoteles gültigen Syllogismen umfasste auch einige, die den heutigen Philosophen das Leben[4] schwer machen. Einer davon ist als *modus barbari* bekannt: $\{\mathtt{A}ba, \mathtt{A}cb\} \models \mathtt{I}ca$. Kann der zugehörige Kalkül im Sinne der von uns definierten Logik korrekt gewesen sein?

[4]Genau genommen: das Interpretieren von Aristoteles.

Kapitel 2

Aussagenlogik

2.1 Definition der Aussagenlogik

Signaturen

Eine *aussagenlogische Signatur* ist einfach eine Menge. Ihre Elemente repräsentieren die atomaren Sätze, d.h. Behauptungen, die wahr oder falsch sein können, und deren interne Struktur oder Zusammenhang untereinander uns nicht interessiert.

Semantik

Ein *Modell* für eine aussagenlogische Signatur σ ist eine Abbildung $M\colon \sigma \to \mathbb{B}$ von σ in die Menge $\mathbb{B} = \{\bot, \top\}$ der beiden Wahrheitswerte $\bot$ (*falsum*, falsch) und $\top$ (*verum*, wahr). Man spricht auch von einer *Interpretation* für σ. Falls $M(A) = \top$ ist, sagen wir, dass der atomare Satz A in M gilt, und schreiben $M \models A$. Falls dagegen $M(A) = \bot$ ist, sagen wir, dass A in M nicht gilt und schreiben $M \not\models A$. Wir setzen $\mathcal{M}_\sigma = \{M \mid M \text{ ist ein Modell für } \sigma\}$.

Aufgabe: Wieviele verschiedene Modelle hat eine aussagenlogische Signatur mit 8 Elementen?

Syntax

Sei σ eine aussagenlogische Signatur. Wir definieren die zugehörige Sprache L_σ der Aussagenlogik wie folgt. Ihr Alphabet ist die Menge $A_\sigma = \{\wedge, \vee, \neg, \texttt{)}, \texttt{(}\} \cup \sigma$. Die Symbole $\wedge, \vee, \neg$ heißen *logische Konnektoren.*

- Jedes Element von σ ist in L_σ.
- Falls $\varphi \in L_\sigma$, so auch $(\neg\varphi) \in L_\sigma$.
- Falls $\varphi, \psi \in L_\sigma$, so auch $(\varphi \wedge \psi) \in L_\sigma$.
- Falls $\varphi, \psi \in L_\sigma$, so auch $(\varphi \vee \psi) \in L_\sigma$.

Ferner legen wir fest, dass $L_\sigma \subseteq A_\sigma^*$ die kleinste Menge mit den vorstehenden Eigenschaften ist. Dadurch ist L_σ eindeutig bestimmt, und es ist zudem möglich, über L_σ Induktionsbeweise zu führen so wie über die natürlichen Zahlen.

Als Beispiel für einen Induktionsbeweis zeigen wir: Die Anzahl der Elemente von σ in einem Satz in L_σ ist genau 1 plus die Anzahl der Konnektoren $\wedge$ oder $\vee$. Hierbei zählen wir Symbole, die mehrmals auftreten, auch mehrmals. In anderen Worten: Für $\varphi \in L_\sigma$ definieren wir $a(\varphi)$ als die Anzahl der Positionen in der Zeichenkette φ, an denen ein atomarer Satz steht, d.h. ein Element von σ, und $b(\varphi)$ als die Anzahl der Positionen, an denen einer der beiden zweistelligen logischen Konnektoren $\wedge$ und $\vee$ steht. Dann ist immer $a(\varphi) = b(\varphi) + 1$.

Der Beweis geht im Prinzip genau wie ein Induktionsbeweis über die natürlichen Zahlen. Allerdings haben wir nun mehrere Induktionsbasen, die wir *alle* überprüfen müssen: die Elemente von σ. In der Tat tritt in jedem Satz der Form A, mit $A \in \sigma$, genau einmal ein Element von σ auf und gar keiner der Konnektoren $\wedge, \vee$. Somit ist $a(A) = 1$ und $b(A) = 0$, also $a(A) = b(A) + 1$. Wir müssen auch mehrere Arten von Induktionsschlüssen überprüfen: Wenn φ die Bedingung erfüllt, so sicher auch $\neg\varphi$: $a(\neg A) = a(A) = b(A) + 1 = b(\neg A) + 1$. Wenn φ und ψ die Bedingung erfüllen, so auch $\texttt{(}\varphi \wedge \psi\texttt{)}$:

$$\begin{aligned} a(\texttt{(}\varphi \wedge \psi\texttt{)}) &= a(\varphi) + a(\psi) \\ &= b(\varphi) + 1 + b(\psi) + 1 \\ b(\texttt{(}\varphi \wedge \psi\texttt{)}) &= b(\varphi) + 1 + b(\psi). \end{aligned}$$

Genauso überprüfen wir auch, dass wenn φ und ψ die Bedingung erfüllen, auch $\texttt{(}\varphi \vee \psi\texttt{)}$ es tut.

Falls Ihnen diese Art von Induktionsbeweis ungewohnt und noch etwas unheimlich ist, können Sie sich als Aufgabe überlegen, wie man das so übersetzen kann, dass der Beweis statt dessen per Induktion über die Länge der Sätze geht.

Satz von der eindeutigen Lesbarkeit Jeder Satz $\varphi \in L_\sigma$ erfüllt genau eine der folgenden Bedingungen:

- φ ist von der Länge 1 und besteht aus einem einzigen Symbol, einem Element von σ.
- φ ist von der Form $\texttt{(}\neg\psi\texttt{)}$, für einen Satz $\psi \in L_\sigma$.
- φ ist von der Form $\texttt{(}\psi_1 \wedge \psi_2\texttt{)}$, für zwei Sätze $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$.
- φ ist von der Form $\texttt{(}\psi_1 \vee \psi_2\texttt{)}$, für zwei Sätze $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$.

Darüber hinaus ist im zweiten Fall der Satz ψ, und sind im dritten und vierten Fall die Sätze ψ_1 und ψ_2 eindeutig bestimmt.

Modellbeziehung

Zur Erinnerung: Um eine Logikinstanz zu definieren, brauchen wir eine Sprache (in diesem Fall: L_σ), die Klasse der Modelle (in diesem Fall: $\mathcal{M}_\sigma$) und eine Modellrelation $\models \subseteq \mathcal{M}_\sigma \times L_\sigma$. Wir müssen daher nur noch für alle Modelle

$M \in \mathcal{M}_\sigma$ und alle Formeln $\varphi \in L_\sigma$ festlegen, ob $M \models \varphi$ gilt. Sei z.B. $\sigma = \{A, B, C\}$. Dann ist ein Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ eine Abbildung $M\colon \{A, B, C\} \to \mathbb{B}$. Beispielsweise:

$$\begin{aligned} M\colon \{A, B, C\} &\to \mathbb{B} \\ A &\mapsto \top \\ B &\mapsto \bot \\ C &\mapsto \bot. \end{aligned}$$

Bei der Definition der Semantik haben wir bereits festgelegt, dass dann gelten soll:

$$\begin{aligned} M &\models A \\ M &\not\models B \\ M &\not\models C. \end{aligned}$$

Damit ist aber a priori noch nicht klar, ob denn nun beispielsweise

$$M \models ((A \wedge \neg C) \vee B)$$

gelten soll oder nicht. Die Symbole $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ sollen für *nicht, und* und *oder* stehen, so dass die obige Formel „(A und nicht B) oder C" ‚bedeutet'. Diese Idee drücken wir nun durch Induktion über die Sätze von L_σ aus, so dass wir später auch Behauptungen über die Modellbeziehung durch Induktion beweisen können. Dieses Vorgehen ist als *Tarskis Definition der Wahrheit* oder *Schema T* bekannt:

Ob für ein Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ und einen Satz $\varphi \in L_\sigma$ die Beziehung $M \models \varphi$ gilt, ist induktiv wie folgt definiert:

- Falls φ ein einziges Symbol $S \in \sigma$ ist, so gilt $M \models \varphi$ genau dann, wenn $M(S) = \top$.
- Falls φ von der Form $(\neg\psi)$ ist mit $\psi \in L_\sigma$, so gilt $M \models \varphi$ genau dann, wenn $M \models \psi$ nicht gilt.
- Falls φ von der Form $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ ist, für zwei Sätze $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$, so gilt $M \models \varphi$ genau dann, wenn sowohl $M \models \psi_1$ als auch $M \models \psi_2$ gilt.
- Falls φ von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ist, für zwei Sätze $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$, so gilt $M \models \varphi$ genau dann, wenn $M \models \psi_1$ oder $M \models \psi_2$ gilt.

Varianten und Abkürzungen

Neben $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ gibt es noch weitere logische Konnektoren, die wir jedoch in unserer Definition nicht benutzt haben. Das ist auch nicht nötig, weil wir sie als ‚Abkürzungen' für kompliziertere Formeln auffassen können. Wenn wir beispielsweise „Aus φ folgt ψ" als Formel ausdrücken wollen, so können wir dafür

$(\varphi \to \psi)$ schreiben als ‚Abkürzung' für die Formel $((\neg\varphi) \vee \psi)$. Entsprechend ist $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ eine ‚Abkürzung' für $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$, und dies wiederum für $(((\neg\varphi) \vee \psi) \wedge ((\neg\psi) \vee \varphi))$.

Wir hätten die Symbole $\to$ und $\leftrightarrow$, und viele weitere, auch gleich in die Sprache mit aufnehmen können. In diesem Fall hätten wir bisher bei jeder induktiven Definition und jedem induktiven Beweis weitere Fälle berücksichtigen müssen, und müssten dies auch weiterhin tun. Diese Arbeit wollen wir uns sparen.

Aufgabe: Wir hätten auch einen der beiden Konnektoren $\wedge$, $\vee$ einsparen können.

Ein besonderer Fall sind die beiden nullstelligen Konnektoren $\top$ und $\perp$, die konstant wahr bzw. konstant falsch sind. Für eine beliebige nichtleere Signatur $\sigma \neq \emptyset$ kann man sich einfach einen Satz $S \in \sigma$ hernehmen und $\top$ als ‚Abkürzung' für $(S \vee (\neg S))$ auffassen, sowie $\perp$ als ‚Abkürzung' für $(S \wedge (\neg S))$. Aber für $\sigma = \emptyset$ geht das nicht. In der Tat ist nach unserer Definition $L_\emptyset = \emptyset$, und dies wäre nicht mehr der Fall, wenn wir, wie eigentlich sinnvoll (aber unüblich), einen oder beide nullstelligen Konnektoren in unser Alphabet mit aufgenommen hätten.

Die Verwendung von Klammern $($, $)$ ist mathematisch gesehen nicht sonderlich elegant. Eleganter wäre es, statt Infixnotation $(\varphi \wedge \psi)$ die *polnische Notation* zu verwenden: $(\wedge\varphi\psi)$. Dadurch wären auch die Klammern überflüssig. Statt $((A \wedge \neg C) \vee B)$ würden wir z.B. schreiben: $\vee \wedge A \neg C B$. Eine solche Variante ließe sich auch zwanglos auf drei- und mehrstellige logische Konnektoren erweitern.

Alle diese Varianten kommen irgendwo in der Literatur vor, und jede hat ihre Vor- und Nachteile. Ich habe für diese Vorlesung die vielleicht konventionellste Wahl getroffen: Infixnotation, weil sie uns allen am vertrautesten ist, und die Konnektoren $\neg, \wedge, \vee$, weil sie den üblichen Verknüpfungen der Booleschen Algebra entsprechen. Letztlich macht das jedoch keinen großen Unterschied, da man von jeder gebräuchlichen Syntax der Aussagenlogik leicht in jede andere übersetzen kann.

2.2 Ein vollständiger Kalkül

Zur Erinnerung: Wenn Φ eine Menge von Sätzen ist und ψ ein weiterer Satz, alle über derselben Signatur σ, dann bedeutet $\Phi \models_\sigma \psi$, dass jedes Modell von Φ auch ein Modell von ψ ist. In anderen Worten: Falls $M \models_\sigma \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$, so auch $M \models_\sigma \psi$. Indem wir $K_\sigma^{\models}(\Phi) = \{\psi \in L_\sigma \mid \Phi \models_\sigma \psi\}$ setzen, können wir diese Relation als einen Kalkül auffassen.

Wir werden nun für die Aussagenlogik einen weiteren Kalkül definieren, indem wir eine weitere Relation $\vdash_\sigma \subseteq \mathcal{P}(L_\sigma) \times L_\sigma$ zwischen Teilmengen von L_σ und einzelnen Sätzen von L_σ einführen.

- Für alle $\varphi \in L_\sigma$ gilt: $\{\varphi\} \vdash_\sigma \varphi$.
- Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \subseteq \Psi$, so auch $\Psi \vdash_\sigma \alpha$.
- Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \vdash_\sigma \beta$, so auch $\Phi \vdash_\sigma (\alpha \wedge \beta)$.

- Falls $\Phi \vdash_\sigma (\alpha \wedge \beta)$, so auch $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \vdash_\sigma \beta$.
- Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ oder $\Phi \vdash_\sigma \beta$, so auch $\Phi \vdash_\sigma (\alpha \vee \beta)$.
- Falls $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_\sigma \gamma$ und $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_\sigma \gamma$, so auch $\Phi \cup \{(\alpha \vee \beta)\} \vdash_\sigma \gamma$.
- Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \vdash_\sigma (\neg\alpha)$, so auch $\Phi \vdash_\sigma \beta$.
- Falls $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_\sigma \beta$ und $\Phi \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash_\sigma \beta$, so auchh $\Phi \vdash_\sigma \beta$.

Die Relation $\vdash_\sigma$ ist definiert als die kleinste Menge $\vdash \subseteq \mathcal{P}(L_\sigma) \times L_\sigma$, welche diese Regeln erfüllt. All diese Regeln gelten offenbar auch für $\models_\sigma$. Wenn wir versuchen, weitere Regeln hinzuzufügen, die ebenfalls für $\models_\sigma$ gelten, werden sie sich als ableitbar aus den bisherigen herausstellen. Zum Beispiel:
Schnittregel: Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_\sigma \beta$, so auch $\Phi \vdash_\sigma \beta$.

Beweis: Wegen $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ gilt auch $\Phi \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash_\sigma \alpha$. Andererseits gilt ohnehin $\Phi \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash_\sigma (\neg\alpha)$. Aus beidem zusammen folgt $\Phi \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash_\sigma \beta$. Zusammen mit $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_\sigma \beta$ erhalten wir wie behauptet $\Phi \vdash_\sigma \beta$.

Aus den Relationen $\vdash_\sigma$ (für alle Signaturen σ) erhalten wir einen Kalkül $K^\vdash$, definiert durch $K^\vdash_\sigma(\Phi) = \{\psi \in L_\sigma \mid \Phi \vdash_\sigma \psi\}$. (Es ist einfach nachzuprüfen, dass $K^\vdash_\sigma$ ein Hüllenoperator ist. Extensivität und Monotonie folgen aus den ersten beiden Regeln für $\vdash_\sigma$, und Idempotenz folgt aus der Schnittregel.)
Korrektheitssatz: Falls $\Phi \vdash_\sigma \psi$, so auch $\Phi \models_\sigma \psi$.

Beweis: Es genügt, zu überprüfen, dass auch die aus der Modellrelation abgeleitete Relation $\models \subseteq \mathcal{P}(L_\sigma) \times L_\sigma$ die obigen Bedingungen erfüllt. Weil $\vdash_\sigma$ als die kleinste solche Relation definiert ist, gilt dann $\vdash_\sigma \subseteq \models_\sigma$, was äquivalent zur Behauptung ist.

Wirklich abgesehen haben wir es aber auf den
Vollständigkeitssatz: Falls $\Phi \models_\sigma \psi$, so auch $\Phi \vdash_\sigma \psi$.

Den Vollständigkeitssatz werden wir am Ende dieses Abschnitts beweisen. Der Korrektheits- und Vollständigkeitssatz zusammen besagen, dass die durch $\vdash$ und $\models$ definierten Kalküle übereinstimmen: $K^\vdash = K^\models$, bzw. $\Phi \vdash_\sigma \psi \iff \Phi \models_\sigma \psi$.

2.2.1 Erfüllbarkeit und Konsistenz

Bisher haben wir mit zwei verschiedenen Schreibweisen von Kalkülen gearbeitet, $\models$ / $\vdash$ und $K^\models/K^\vdash$. Die beiden sind durch die folgenden Beziehungen miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned} \Phi \models_\sigma \psi &\iff K^\models_\sigma(\Phi) \ni \psi \\ \Phi \vdash_\sigma \psi &\iff K^\vdash_\sigma(\Phi) \ni \psi \end{aligned}$$

Diese Art von Übersetzung ist natürlich für jeden Kalkül (für jede Logik) möglich. Unsere speziellen Kalküle für die Aussagenlogik lassen sich jedoch auch über den Begriff der Erfüllbarkeit bzw. Konsistenz charakterisieren:

Eine Menge $\Phi \subseteq L_\sigma$ von Sätzen heißt *erfüllbar*, falls sie ein Modell hat, d.h. falls es ein Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ gibt, so dass $M \models \Phi$. Andernfalls heißt Φ *unerfüllbar*.

Eine Menge $\Phi \subseteq L_\sigma$ heißt *inkonsistent*, falls jeder L_σ-Satz aus ihr im $\vdash$-Kalkül gefolgert werden kann, d.h. wenn $K^\vdash = L_\sigma$. Sie heißt *konsistent*, falls es einen Satz gibt, der im $\vdash$-Kalkül nicht aus ihr gefolgert werden kann, wenn also $K^\vdash \subsetneq L_\sigma$.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass eine Satzmenge genau dann erfüllbar ist, wenn sie konsistent ist, und damit den Vollständigkeitssatz zu beweisen. Aber zunächst schauen wir uns an, was im Sonderfall der leeren Signatur geschieht. Für $\sigma = \emptyset$ ist $L_\sigma = \emptyset$, und deshalb gibt es nur eine Satzmenge $\Phi \subseteq L_\sigma$, nämlich $\Phi = \emptyset$. Diese ist erfüllbar, denn es gibt tatsächlich ein Modell für σ: $\mathcal{M}_\sigma$ hat als einziges Element die einzige Funktion $M : \emptyset \to \mathbb{B}$. $\Phi = \emptyset$ ist aber inkonsistent, weil es in L_σ gar keine Sätze gibt, die also alle aus Φ folgen.

Der Zusammenhang zwischen Erfüllbarkeit/Konsistenz und den beiden Kalkülen $\models$ und $\vdash$ ist wie folgt:

$$\begin{array}{lcr}
\Phi \models_\sigma \psi & \iff & \Phi \cup \{(\neg\psi)\} \text{ ist unerfüllbar} \\
\Phi \models_\sigma (\neg\psi) & \iff & \Phi \cup \{\psi\} \text{ ist unerfüllbar} \\
\Phi \vdash_\sigma \psi & \iff & \Phi \cup \{(\neg\psi)\} \text{ ist inkonsistent} \\
\Phi \vdash_\sigma (\neg\psi) & \iff & \Phi \cup \{\psi\} \text{ ist inkonsistent.}
\end{array}$$

Die ersten beiden Behauptungen sind offensichtlich. Beweis der dritten Behauptung: Aus $\Phi \vdash_\sigma \psi$ folgt $\Phi \cup \{(\neg\psi)\} \vdash_\sigma (\psi \wedge (\neg\psi))$. Andererseits gilt $\{(\psi \wedge (\neg\psi))\} \vdash_\sigma \chi$ für alle $\chi \in L_\sigma$. Mit der Schnittregel erhalten wir $\Phi \cup \{(\neg\psi)\} \vdash \chi$ für alle $\chi \in L_\sigma$, d.h. $\Phi \cup \{(\neg\psi)\}$ ist inkonsistent. Wenn umgekehrt $\Phi \cup \{(\neg\psi)\}$ inkonsistent ist, dann folgt insbesondere $\Phi \cup \{(\neg\psi)\} \vdash_\sigma \psi$. Andererseits gilt natürlich auch $\Phi \cup \{\psi\} \vdash_\sigma \psi$. Aus beidem zusammen können wir $\Phi \vdash_\sigma \psi$ schließen. Die vierte Behauptung wird ganz ähnlich bewiesen.

Eine Menge $\Phi \subset L_\sigma$ heißt *maximal konsistent* falls sie konsistent ist (d.h. $\Phi \subsetneq L_\sigma$) und es keine Menge Ψ gibt mit $\Phi \subsetneq \Psi \subsetneq L_\sigma$.

Satz von Lindenbaum: Sei $\sigma \neq \emptyset$. Jede konsistente Menge $\Phi \subset L_\sigma$ lässt sich erweitern zu einer maximalen konsistenten Menge $\Psi \subseteq L_\sigma$.

Beweis: Die Menge $\{\Psi \in \mathcal{P}(L_\sigma) \mid \Psi \supseteq \Phi \text{ und } \Psi \text{ ist konsistent}\}$ ist durch Inklusion partiell geordnet und hat die Eigenschaft, dass jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat. Nach dem Zornschen Lemma enthält sie daher ein maximales Element. Zur Erinnerung:

Zornsches Lemma: Eine partiell geordnete Menge, in der jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

Wir können nun (ebenfalls unter der Voraussetzung $\sigma \neq \emptyset$) zeigen, dass jede konsistente Menge $\Phi \subseteq L_\sigma$ erfüllbar ist. Nach dem Satz von Lindenbaum genügt es zu zeigen, dass jede maximal konsistente Menge Φ erfüllbar ist. Wie man leicht nachprüft, hat eine solche Menge die Eigenschaft, dass $\Phi \vdash_\sigma (\neg\psi)$ äquivalent ist zu $\Phi \nvdash_\sigma \psi$. Wenn wir das auf atomare Sätze $A \in \sigma$ anwenden, sehen wir, dass wir bei der Definition eines Modells M gar keine Wahl haben: *Entweder* gilt $\Phi \vdash A$, *oder* $\Phi \vdash (\neg A)$. Im ersteren Fall muss $M \models_\sigma A$ gelten, und wir setzen daher $M(A) = \top$. Im letzteren müssen wir $M(A) = \bot$ setzen, damit $M \models_\sigma \neg A$. Nun können wir durch Induktion über die Formeln zeigen, dass für jede Formel $\psi \in L_\sigma$ gilt: $M \models_\sigma \psi \iff \Phi \vdash_\sigma \psi$.

Für $\sigma \neq \emptyset$ folgt somit, dass Erfüllbarkeit und Konsistenz äquivalent sind und folglich auch der Vollständigkeitssatz gilt. Für $\sigma = \emptyset$ gilt der Vollständigkeitssatz aber trivialerweise, da es gar keine Sätze $\psi \in L_\emptyset$ gibt.

Aus dem Vollständigkeitssatz folgt relativ leicht der

Kompaktheitssatz: Wenn jede endliche Teilmenge von $\Phi \subseteq L_\sigma$ erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar.

Im Beweis können wir $\sigma \neq \emptyset$ annehmen, da die Behauptung für $\sigma = \emptyset$ trivial ist. Wir überprüfen hierzu: Wenn jede endliche Teilmenge von $\Phi \subseteq L_\sigma$ konsistent ist, dann ist auch Φ konsistent. Dazu definieren wir die Relation $\Phi \vdash'_\sigma \psi$ als: Für eine endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ gilt $\Phi' \vdash_\sigma \psi$. Auch diese Relation erfüllt alle Regeln, die $\vdash$ definieren. Da wir $\vdash$ als die kleinste solche Relation definiert haben, gilt $\vdash \subseteq \vdash'$. Andererseits gilt offensichtlich $\Phi \vdash' \psi \implies \Phi \vdash \psi$, d.h. $\vdash' \subseteq \vdash$.

Kapitel 3

Universelle Algebra

3.1 Universelle Algebra als Logik

Zur Erinnerung: Definition von Gruppe, Ring (mit 1), $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Signaturen

Eine *funktionale Signatur* ist eine Menge $\mathcal{F}$ von *Funktionssymbolen* zusammen mit einer Funktion $\mathrm{ar}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$, die jedem Funktionssymbol eine natürliche Zahl, seine *Stelligkeit*, zuordnet.

Einige Beispiele von Signaturen $\sigma = (\mathcal{F}, \mathrm{ar})$:

- $\mathcal{F} = \{+, -, 0\}$; $\mathrm{ar}(+) = 2$, $\mathrm{ar}(-) = 1$, $\mathrm{ar}(0) = 0$.
- $\mathcal{F} = \{\cdot, {}^{-1}, 1\}$; $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}({}^{-1}) = 1$, $\mathrm{ar}(1) = 0$.
- $\mathcal{F} = \{+, -, 0, \cdot, 1\}$; $\mathrm{ar}(+) = 2$, $\mathrm{ar}(-) = 1$, $\mathrm{ar}(0) = 0$, $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}(1) = 0$.

Semantik

Sei $\sigma = (\mathcal{F}, \mathrm{ar})$ eine funktionale Signatur. Eine *universelle σ-Algebra M* ist eine Menge $|M|$ zusammen mit je einer $\mathrm{ar}\, f$-stelligen Funktion $f^M\colon |M|^{\mathrm{ar}\, f} \to |M|$ für jedes Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$. Ein Modell für σ ist eine universelle σ-Algebra.

Beispielsweise können wir jede Gruppe G als eine universelle Algebra auffassen, indem wir als $|G|$ die Elemente der Gruppe nehmen, als $\cdot^M$ die Gruppenmultiplikation, als $({}^{-1})^M$ die Abbildung, die jedem Gruppenelement sein Inverses zuordnet, und als 1^M das neutrale Element der Gruppe. Eine universelle Algebra mit derselben Signatur muss aber keine Gruppe sein, da wir die Gruppenaxiome nicht gefordert haben.

Eine Abbildung $h\colon |M| \to |N|$ zwischen zwei universellen σ-Algebren heißt ein *Homomorphismus*, falls h mit den Interpretationen der Funktionssymbole vertauscht. In anderen Worten, für alle Funktionssymbole f von σ muss die Bedingung $h \circ f^M = f^N \circ h^{\operatorname{ar} f}$ gelten; d.h.

$$h\big(f^M(m_1, \ldots m_{\operatorname{ar} f})\big) = f^N\big(h(m_1), \ldots, h(m_{\operatorname{ar} f})\big)$$

für alle $m_1, \ldots m_{\operatorname{ar} f} \in |M|$.

Diese Definition vereinigt die Begriffe von Gruppen- und Ring-Homomorphismen, aber auch viele weitere Begriffe von Homomorphismen. Hierbei ist zu beachten, dass der Begriff der Homomorphismen für eine Klasse von algebraischen Strukturen wesentlich von der Wahl der Signatur abhängt. BEISPIEL!

Syntax

Wir legen zunächst eine abzählbare Menge $X = \{\mathtt{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von Symbolen fest, die wir *Variable* nennen.

Sei $\sigma = (\mathcal{F}, \operatorname{ar})$ eine funktionale Signatur. Das zugehörige Alphabet ist die disjunkte Vereinigung $A_\sigma = \sigma \cup X \cup \{=\}$. Bevor wir zu den Sätzen der zugehörigen Sprache L_σ kommen, definieren wir die *Terme*:

- Jede Variable ist ein Term.
- Falls $f \in F$ ein n-stelliges Funktionssymbol ist (d.h. $\operatorname{ar}(f) = n$), und falls $t_1, \ldots t_n$ Terme sind, dann ist auch $ft_1 \ldots t_n$ ein Term.

Wir definieren die Menge der σ-Terme als die kleinste Teilmenge von A_σ^*, die unter diesen Regeln abgeschlossen ist. Eine *σ-Gleichung* ist eine Zeichenkette der Form $\mathtt{=}t_1t_2$, und L_σ ist die Menge der σ-Gleichungen.[1] In dieser Sprache können wir nun (in den jeweiligen Signaturen) die Axiome für Gruppen, abelsche Gruppen, Ringe usw. ausdrücken.

Auch hier müssten wir eigentlich wieder den Satz von der eindeutigen Lesbarkeit beweisen.

Modellbeziehung

Eine Belegung s in M ist eine Abbildung, die jeder Variablen ein Element von M zuordnet. Sie lässt sich in offensichtlicher Weise (durch Induktion über den Termaufbau) eindeutig fortsetzen zu einer Abbildung, die jedem Term ein Element von M zuordnet.

Wir legen fest: $M \models \mathtt{=}t_1t_2$ genau dann, wenn für jede Belegung s gilt: $s(t_1) = s(t_2)$.

Auch in der universellen Algebra lässt sich der semantische Folgerungsbegriff auf einen syntaktischen zurückführen:

- $\emptyset \vdash \mathtt{=}tt$ für jeden Term t.

[1] Statt $\mathtt{=}t_1t_2$ hätten wir z.B. auch $t_1\mathtt{=}t_2$ wählen können, aber wir ziehen hier die polnische Notation vor.

- Falls $\Phi \vdash \alpha$ und $\Phi \subseteq \Psi$, so auch $\Psi \vdash \alpha$.
- $\{\texttt{=}pq\} \vdash \texttt{=}qp$ für alle Terme p und q.
- $\{\texttt{=}pq, \texttt{=}qr\} \vdash \texttt{=}pr$ für alle Terme p, q und r.
- $\{\texttt{=}pp', \texttt{=}q_1pq_2r\} \vdash \texttt{=}q_1p'q_2r$; hierbei sind q_1 und q_2 beliebige Zeichenketten, also nicht unbedingt Terme, aber q_1pq_2 ist ein Term.
- Falls p, q, r Terme sind und $n \in \mathbb{N}$, und falls p' und q' sich aus p und q ergeben, indem wir jedes Vorkommen von $\mathtt{x}_n$ in p bzw. p' durch r ersetzen, so gilt $\{\texttt{=}pq\} \vdash \texttt{=}p'q'$.

Die Relation $\vdash_\sigma \subseteq \mathcal{P}(L_\sigma) \times L_\sigma$ ist definiert als die kleinste Relation, die diese Regeln erfüllt. Offensichtlich erfüllt diese Relation den Korrektheitssatz, d.h. falls $\Phi \vdash \psi$, so ist auch jedes Modell von Φ ein Modell von ψ: $\Phi \models_\sigma \psi$. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, d.h. der Vollständigkeitssatz; aber wir werden das nicht beweisen und auch nicht benötigen.

3.2 Varietäten

Einige algebraische Konstruktionen lassen sich im allgemeinen Kontext der universellen Algebra definieren. Im Folgenden fixieren wir eine funktionale Signatur σ und betrachten drei Konstruktionen, mit denen man aus vorhandenen σ-Algebren neue gewinnen kann.

Sei A eine σ-Algebra und $B \subseteq |A|$. Wir interessieren uns für den Sonderfall, dass B unter den Funktionen von A abgeschlossen ist. Das heißt für jedes n-stellige Funktionssymbol von σ und alle $b_1, \ldots, b_n \in B$ ist auch $f^A(b_1, \ldots, b_n) \in B$. In diesem Fall können wir die Funktionen f^A auf B einschränken. Die Menge B zusammen mit den eingeschränkten Funktionen f^B als Interpretationen der Funktionssymbole bildet eine neue σ-Algebra: eine *Subalgebra* von B.

In abelschen Gruppen, Ringen und Moduln kann man Quotienten bilden. Wenn beispielsweise B eine Untergruppe einer abelschen Gruppe A ist, ist A/B eine abelsche Gruppe, die aus Äquivalenzklassen von Elementen von A besteht. Die 0 von A/B ist hierbei B. Dass der Fall im Allgemeinen etwas komplizierter ist, sieht man schon bei den nichtabelschen Gruppen: Wenn A nicht abelsch ist, müssen wir zusätzlich fordern, dass die Untergruppe B normal ist. Im allgemeinsten Fall kann man das, was man herausdividiert, nicht durch eine Unteralgebra repräsentieren. Ein Beispiel dafür sind affine Räume, bei denen man nicht Unterräume des affinen Raums selbst sondern des zugehörigen Vektorraums herausdividieren muss. Ein offensichtliches verbindendes Element aller dieser Definitionen ist, dass wir einen surjektiven Homomorphismus $A \to A/B$ haben: Die Verallgemeinerung der Quotientengruppe etc. ist das *homomorphe Bild.* B heißt ein homomorphes Bild von A, falls es einen Epimorphismus $A \to B$ gibt.

Das *(direkte) Produkt* von σ-Algebren wird dagegen genau so gebildet, wie man es erwarten würde. Das direkte Produkt $A \times B$ hat als zugrunde liegende

Menge das Produkt $|A| \times |B|$, und alle Funktionen sind elementweise definiert. Analog für das Produkt $\prod_{i \in I} A_i$ einer beliebigen Familie von σ-Algebren.

Eine *Varietät* mit Signatur σ ist eine Klasse von σ-Strukturen, die unter Substrukturen, homomorphen Bildern und direkten Produkten abgeschlossen ist. Mit anderen Worten, eine Klasse K von σ-Strukturen ist eine Varietät, falls gilt:

- Angenommen, $A \in K$ und B ist eine Subalgebra von A. Dann ist auch $B \in K$.
- Angenommen, $A \in K$ und $A \to B$ ist ein Epimorphismus. Dann ist auch $B \in K$.
- Angenommen, $B = \prod_{i \in I} A_i$ und $A_i \in K$ für alle $i \in I$. Dann ist auch $B \in K$.

Satz (Tarski). Sei K eine Klasse von σ-Algebren und V die kleinste Varietät, die K enthält. Dann lässt sich jedes Element von V schreiben als das homomorphe Bild einer Subalgebra eines direkten Produkts von Elementen von K.

Satz von Birkhoff

Eine *Theorie* in einer gegebenen Signatur σ ist eine Menge von Sätzen dieser Signatur, im Falle der universellen Algebra also eine Menge von Gleichungen. Die Menge aller Modelle einer Theorie ist

$$\mathcal{M}(T) = \{M \in \mathcal{M}_\sigma \mid M \models T\}.$$

Die Theorie einer universellen σ-Algebra A ist

$$\mathrm{Th}(A) = \{\varphi \in L_\sigma \mid M \models \varphi\},$$

und die Theorie einer Klasse K von σ-Algebren ist

$$\mathrm{Th}(K) = \bigcap_{A \in K} \mathrm{Th}(A) = \{\varphi \in L_\sigma \mid M \models \varphi \text{ für alle } A \in K\}.$$

Satz (Birkhoff). Sei σ eine funktionale Signatur und $V \subseteq \mathcal{M}_\sigma$ eine Klasse von σ-Strukturen. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. $V = \mathcal{M}(\mathrm{Th}(V))$.
2. $V = \mathcal{M}(T)$ für eine Theorie T.
3. V ist eine Varietät.

Beweisskizze. (1) $\implies$ (2): Trivial. (2) $\implies$ (3): Es ist zu zeigen, dass V abgeschlossen unter homomorphen Bildern, Substrukturen und endlichen Produkten ist. Dazu überprüft man, dass wenn eine Gleichung in einer Algebra gilt, sie auch in jedem homomorphen Bild und jeder Substruktur gilt, und wenn sie in allen Faktoren eines direkten Produktes gilt, so auch im Produkt selbst.

(3) $\implies$ (1): $V \subseteq \mathcal{M}(\mathrm{Th}(V))$ ist klar. Nach (2) $\implies$ (3) ist die rechte Seite eine Varietät. Indem man das benutzt, kann man leicht $\mathrm{Th}(V) = \mathrm{Th}(\mathcal{M}(\mathrm{Th}(V)))$ beweisen. Der letzte Schritt zum Beweis von $V \supseteq \mathcal{M}(\mathrm{Th}(V))$ ist komplizierter. Er involviert die Konstruktion von Termalgebren über einer Menge von Variablen (d.h. die Elemente der Algebra sind die Terme), die man dann durch die durch T gegebene Äquivalenzrelation dividiert, um ein Modell von T zu erhalten.

3.3 Universelle Algebra mit Relationen

Signaturen

Eine *relationale Signatur* ist eine Menge $\mathcal{R}$ von *Relationssymbolen* zusammen mit einer Funktion $\mathrm{ar}\colon \mathcal{R} \to \mathbb{N}$, die jedem Relationssymbol eine natürliche Zahl, seine *Stelligkeit*, zuordnet.

Eine *gemischte Signatur* setzt sich aus einer funktionalen und einer relationalen Signatur zusammen: Sie besteht aus einer disjunkten Vereinigung $\mathcal{F}\dot{\cup}\mathcal{R}$ zusammen mit einer Funktion $\mathrm{ar}\colon \mathcal{F}\dot{\cup}\mathcal{R} \to \mathbb{N}$.

Semantik

Sei $\sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathrm{ar})$ eine gemischte Signatur. Eine *σ-Struktur* M ist eine Menge $|M|$ zusammen mit je einer $\mathrm{ar}\, R$-stelligen Funktion $R^M \subseteq |M|^{\mathrm{ar}\, R}$ für jedes Relationssymbol $R \in \mathcal{R}$ und je einer $\mathrm{ar}\, f$-stelligen Funktion $f^M\colon\ |M|^{\mathrm{ar}\, f} \to |M|$ für jedes Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$. Ein Modell für σ ist eine σ-Struktur. Eine σ-Struktur heißt algebraisch oder relational, falls σ funktional bzw. relational ist. Die algebraischen Strukturen sind also gerade die universellen Algebren.

Beim Begriff des Homomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen müssen wir etwas genauer hinschauen als im Spezialfall der universellen Algebran. Eine Abbildung $h\colon\ |M| \to |N|$ heißt *Homomorphismus* (oder *σ-Homomorphismus*), falls Folgendes gilt:

- Die Abbildung h vertauscht mit den Interpretationen der Funktionssymbole $f \in \mathcal{F}$.
- Für jedes Relationssymbol $R \in \mathcal{R}$ und jedes Tupel $\bar{a} = a_1 \dots a_n \in M$, so dass $\bar{a} \in R^M$ ist, ist auch $(f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R^M$.

Syntax

Die Terme für eine Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathrm{ar})$ sind genau dieselben wie für $(\mathcal{F}, \mathrm{ar})$. Die Relationssymbole spielen hier also keine Rolle. An Sätzen haben wir nun aber zusätzlich zu den Gleichungen auch die Zeichenketten der Form $Rt_1 \dots t_n$, wobei $R \in \mathcal{R}$ ein n-stelliges Relationssymbol ist und $t_1 \dots t_n$ Terme sind.

Modellbeziehung

Die Modellbeziehung ist definiert wie gehabt, wobei wir für Sätze, die mit einem Relationssymbol natürlich dieses Relationssymbol an Stelle der Identität verwenden. Das heißt, gegeben eine Belegung s in M, gilt $(M, s) \models Rt_1 \dots t_n$ genau dann, wenn $s(t_1) \dots s(t_n) \in R^M$.

Kapitel 4

Prädikatenlogik der 1. Stufe

4.1 Definition der Logik der 1. Stufe

Signaturen

Wie in der universellen Algebra mit Relationen.

Semantik

Wie in der universellen Algebra mit Relationen.

Syntax

Wird später nachgetragen. Siehe vorerst Ebbinghaus, Flum, Thomas: Einführung in die mathematische Logik.

Die Sätze der universellen Algebra heißen in der Prädikatenlogik *atomare Formeln*. „Atomar“ deshalb, weil man sie wie die aussagenlogischen Variablen durch logische Konnektoren miteinander verknüpfen kann. Der Abschluss der atomaren Formeln unter den formalen booleschen Kombinationen sowie den Quantifizierungen ist die Menge aller *Formeln* der betreffenden Signatur. Wenn also z.B. φ eine Formel ist und x eine Variable, dann sind auch $\forall x(\varphi)$ und $\exists x(\varphi)$ Formeln. Man kann nun präzise definieren, was es bedeutet, dass eine Variable frei in einer Formel vorkommt. Die *Sätze* sind diejenigen Formeln, in denen keine Variable frei vorkommt.

Modellbeziehung

Wird später nachgetragen. Siehe vorerst Ebbinghaus, Flum, Thomas: Einführung in die mathematische Logik.

Wieder brauchen wir den Begriff der Belegungen. Gegeben eine Struktur und eine Belegung, können wir durch Induktion jeder Formel einen Wahrheitswert zuweisen. Es stellt sich dann heraus, dass der Wahrheitswert eines Satzes nicht von der Belegung abhängt.

4.2 Vollständigkeitssatz und Kompaktheitssatz

Für die Logik der 1. Stufe lässt sich eine rein syntaktische Ableitbarkeitsrelation $\vdash$ definieren, ähnlich wie für die Aussagenlogik. Für die Details siehe Ebbinghaus, Flum, Thomas: Einführung in die mathematische Logik (Kapitel: „Ein Sequenzenkalkül").

Ein wesentlicher Unterschied ist hierbei, dass der Kalkül nicht nur auf den Sätzen definiert ist sondern auf allen Formeln.

Ähnlich wie wir das für die Aussagenlogik getan haben, beweist man nun:

Korrektheitssatz: Seien Φ eine Menge von σ-Formeln und ψ eine σ-Formel. Falls $\Phi \vdash \psi$, dann gilt für alle σ-Strukturen M und alle Belegungen $b\colon X \to |M|$ in M: Falls $(M, b) \models \Phi$, so auch $(M, b) \models \psi$.

In seiner Doktorarbeit in Wien bewies Kurt Gödel den zugehörigen Vollständigkeitssatz:

Gödelscher Vollständigkeitssatz: Seien Φ eine Menge von σ-Formeln und ψ eine σ-Formel. Angenommen, für alle σ-Strukturen M und alle Belegungen $b\colon X \to |M|$ in M gilt: Falls $(M, b) \models \Phi$, so auch $(M, b) \models \psi$. Dann gilt auch $\Phi \vdash \psi$.

Ebenfalls wie schon für die Aussagenlogik folgt aus dem Korrektheits- und dem Vollständigkeitssatz der Kompaktheitssatz:

Kompaktheitssatz: Sei σ eine Signatur und T eine σ-Theorie, d.h. eine Menge von σ-Sätzen. Falls jede endliche Teilmenge $T' \subseteq T$ erfüllbar ist in dem Sinne, dass es eine σ-Struktur M gibt mit $M \models T$, dann ist auch T selbst erfüllbar.

Da wir den Korrektheits- und Vollständigkeitssatz nicht bewiesen haben, beweisen wir den Kompaktheitssatz direkt. Die Beweisidee für moderne Beweise des Vollständigkeitssatzes ist übrigens ähnlich.

Beweis: Wir erweitern die Signatur σ um (evt. sehr viele) zusätzliche Konstantensymbole zu einer neuen Signatur σ', und die Theorie T zu einer σ'-Theorie $T' \supseteq T$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Jede endliche Teilmenge von T' ist erfüllbar.
- Für jeden σ'-Satz φ ist entweder $\varphi \in T'$ oder $\neg\varphi \in T'$.
- Für jeden Satz $\varphi \in T$ von der Form $\varphi = \exists \mathtt{x} \psi$ gibt es eine Konstante $\mathtt{c}$ in σ' so dass $\psi\frac{\mathtt{c}}{\mathtt{x}} \in T'$.

Es ist leicht zu sehen, dass T' bis auf Isomorphie ein Modell M „eingebaut" hat: Wir definieren auf der Menge C der Konstanten von σ' die Äquivalenzrelation $\mathtt{c} \sim \mathtt{d} \iff \mathtt{=cd} \in T'$. Als zugrunde liegende Menge für M nehmen wir $|M| = C/\sim$. Die atomaren Sätze in T' (atomare Formeln, die zugleich Sätze sind) sagen uns, wie die Funktionen und Relationen in M zu definieren sind. Indem wir die drei speziellen Eigenschaften von T' benutzen, können wir durch Induktion über den Formelaufbau zeigen, dass für jede Interpretation $b\colon X \to |M| = C/\sim$ und jede σ'-Formel φ die folgende Beziehung gilt:

$$(M, b) \models \varphi \iff M \models \psi \iff \psi \in T',$$

wobei $\psi = \varphi\frac{b'(\mathtt{x}_0)}{\mathtt{x}_0}\frac{b'(\mathtt{x}_1)}{\mathtt{x}_1}\frac{b'(\mathtt{x}_2)}{\mathtt{x}_2}\cdots$ ist, mit $b'\colon X \to C$ so gewählt, dass $b(\mathtt{x}_n) = b'(\mathtt{x}_n)/\sim$.

Es bleibt zu zeigen, dass es eine solche Signatur $\sigma' \supseteq \sigma$ und σ'-Theorie T' gibt. Wir überprüfen zunächst, dass es eine σ-Theorie T gibt, die zumindest die ersten beiden Bedingungen erfüllt: Unter allen Erweiterungen von T, welche die erste Bedingung erfüllen, gibt es nach dem Zornschen Lemma (mindestens) eine maximale. Wir nennen sie T' und zeigen, dass sie auch die zweite Bedingung erfüllt. Nehmen wir im Widerspruch zur zweiten Bedingung an, es gäbe einen σ-Satz φ, für den weder $\varphi \in T'$ noch $\neg\varphi \in T'$ ist. Wegen Maximalität von T' gibt es dann eine endliche Teilmenge $U_1 \subseteq T'$, so dass $T_1 \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar ist, und ebenso eine endliche Teilmenge $U_1 \subseteq T'$, so dass $T_1 \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar ist. Dann folgt aber, dass die Theorie $U = U_1 \cup U_2$, ebenfalls eine endliche Teilmenge von T', überhaupt unerfüllbar ist. (Denn in einem Modell von U müsste ja entweder φ oder $\neg\varphi$ gelten.) Dies steht aber im Widerspruch zur ersten Bedingung.

Um T' zu erhalten, das alle drei Bedingungen erfüllt, gehen wir wie folgt vor: Ausgehend von $\sigma_0 = \sigma$ und $T_0 = T$ bilden wir eine σ_0-Theorie T_0' wie eben gezeigt, welche die ersten beiden Bedingungen erfüllt. Danach fügen wir für jeden σ_0-Satz der Form $\varphi = \exists \mathtt{x}_n \psi$ eine neue Konstante $\mathtt{c}_\varphi$ zu σ_0 hinzu. Die so entstandene Signatur nennen wir σ_1. Wir nehmen die σ_1-Theorie T_1, die aus T_0' zusammen mit den Sätzen $\psi\frac{\mathtt{c}}{\mathtt{x}}$ besteht. Wie man leicht sieht, ist jede endliche Teilmenge der resultierenden Theorie erfüllbar. Nun bilden wir $T_1' \supseteq T_1$ wie zuvor $T_0' \supseteq T_0$. Indem wir den Prozess wiederholen, erhalten wir eine Kette von Signaturen $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots$ und eine Kette von Theorien $T_0 \subseteq T_0' \subset T_1 \subset T_1' \subset T_2 \subset T_2' \subset \ldots$. Schließlich bilden wir $\sigma' = \bigcup n \in \mathbb{N}\sigma_n$ und $T' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n'$. Da jede σ'-Formel φ bereits eine σ_n-Formel für ein $n \in \mathbb{N}$ ist und dann $\varphi \in T$ äquivalent zu $\varphi \in T_n'$ ist, überprüfen wir leicht, dass T' alle drei Eigenschaften erfüllt.

Korollar: Angenommen, T hat für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Modell mit mindestens n Elementen. Dann hat T ein unendliches Modell.

Beweis: Sei T' die Theorie T zusammen mit Sätzen, die aussagen: es gibt mindestens 1, mindestens 2, mindestens 3, ... Elemente. Weil jede endliche Teiltheorie von T' erfüllbarist, ist auch T' selbst erfüllbar. Ein Modell von T' ist aber ein unendliches Modell von T.

Korollar: Sei σ eine Signatur, die die übliche Signatur der Körper erweitert, und T eine σ-Theorie, so dass alle Modelle $K \models T$ Körper sind. Falls T für unendlich viele verschiedene Primzahlen p ein Modell der Charakteristik p hat, dann hat T auch ein Modell der Charakteristik 0.

Beweis: Sei

$$T' = T \cup \{\neg\mathtt{=0+11}, \neg\mathtt{=0++111}, \neg\mathtt{=0++++11111}, \neg\mathtt{=0++++++1111111}, \neg\mathtt{=0++++++++++++1111111111111}, \ldots\},$$

d.h. T zusammen mit Sätzen die aussagen, dass der Körper nicht die Charakteristik 2, 3, 5, 7,... hat. T' ist endlich erfüllbar, also erfüllbar. Ein Modell von T' ist zugleich ein Modell von T, und hat Charakteristik 0.

Korollar: Angenommen, die σ-Theorie T hat ein Modell der unendlichen Mächtigkeit κ. Dann hat T für jede Kardinalzahl $\kappa' > \kappa$ auch ein Modell mit einer Mächtigkeit mindestens κ'.

Beweis: Sei $M \models T$ ein Modell der Mächtigkeit κ. Wir fügen κ' viele neue Konstanten zu σ hinzu und betrachten in der erweiterten Signatur σ' die Theorie T' bestehend aus T zusammen mit den atomaren Sätzen, die sagen, dass die neuen Konstanten paarweise verschiedene Elemente repräsentieren. Es folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass die Theorie T' erfüllbar ist. Ein beliebiges Modell von T' lässt sich auch als Modell von T auffassen und hat sicher mindestens κ' viele Elemente.

Korollar: Sei σ eine Signatur, die ein 2-stelliges Relationssymbol $\mathtt{R}$ enthält, und T eine σ-Theorie, die die Theorie der ungerichteten Graphen erweitert. ($(a, b) \in \mathtt{R}^G$ fassen wir hierzu auf als: „Es gibt eine (gerichtete) Kante von a nach b.“) Wir können zwar Formeln mit der Bedeutung „x und y haben Abstand 1“, „x und y haben Abstand 2“, „x und y haben Abstand 3“, ... definieren, aber es gibt keine Formel mit der Bedeutung „Es gibt einen Weg von x nach y“.

4.3 Satz von Löwenheim-Skolem

Siehe vorerst den englischsprachigen Wikipedia-Artikel.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einführung

Was ist mathematische Logik überhaupt? Und was ist Logik?

Die Logik ist ein wissenschaftliches Gebiet im Grenzbereich von Philosophie, Mathematik und Informatik. Ihr Ursprung lag in der Philosophie; beispielsweise schrieb Aristoteles über die Lehre vom richtigen Schließen und stellte insbesondere einen einflussreichen Katalog von *Syllogismen* auf. Bei diesen ging es um Aussagen der folgenden Formen, die sogenannten *kategorischen Urteile*:

- *Alle A sind B.*
- *Einige A sind B.*
- *Kein A ist B.*
- *Einige A sind nicht B.*

Er untersuchte jede mögliche Kombination bestehend aus zwei solchen kategorischen Urteilen als Prämissen und einem weiteren als Konklusion:

1. Prämisse:	Alle Minister sind Politiker.
2. Prämisse:	Einige Politiker sind kriminell.
Konklusion:	Einige Minister sind kriminell.

1. Prämisse:	Alle Tiere sind Bäume.
2. Prämisse:	Einige Hunde sind keine Bäume.
Konklusion:	Einige Hunde sind keine Tiere.

Eine solche Schlussfolgerung mit zwei Prämissen und einer Konklusion heißt Syllogismus, falls in ihr drei Eigenschaften jeweils genau zweimal vorkommen, aber nie im selben kategorischen Urteil.[1] Ein Syllogismus heißt *gültig*, falls allein aus formellen Gründen bereits feststeht, dass die Konklusion wahr ist wann immer die beiden Prämissen wahr sind. Die Beispiele zeigen, dass wir uns leicht von den Wahrheitswerten der einzelnen kategorischen Urteile ablenken lassen. So ist der erste, ungültige, Syllogismus durchaus überzeugend, während der zweite, gültige, evt. Widerspruch hervorruft. Die Logik lehrte also ursprünglich das korrekte Argumentieren in einer ähnlichen Weise, wie die Rhetorik das überzeugende Argumentieren lehrt.

Die Beschränkung nur auf kategorische Aussagen ist natürlich eine recht starke Einschränkung. Aus heutiger Sicht scheint eine andere, ähnlich starke Einschränkung natürlicher: Eine *Aussage* ist eine Behauptung, die (in einem gegebenen Kontext) entweder wahr oder falsch sein muss. Also beispielsweise „Es regnet.“, aber z.B. keine Aufforderungen („Komm jetzt endlich!“) oder Fragen („Was soll das überhaupt?“) Dabei werden Probleme in Bezug auf die genaue Interpretation der Wörter in Grenzfällen (bis zu welchem Punkt ist Schneeregen noch „Regen“?) üblicherweise ignoriert. Durch *Negation* (Verneinung) einer Aussage, oder durch Verknüpfung von zwei Aussagen mit einer *Konjunktion (und)* oder einer *Disjunktion (oder)*, können wir neue, zusammengesetzte Aussagen erzeugen. Aussagen der Form „Wenn A, dann B.“ können wir als „B oder nicht A“ ausdrücken. Analog zu Aristoteles' Syllogismen können wir nun Schlüsse wie den folgenden auf ihre Gültigkeit untersuchen:

1. Prämisse:	Wenn es regnet, wird die Straße nass.
2. Prämisse:	Die Straße wird nicht nass.
Konklusion:	Es regnet nicht.

Logik = Syntax + Semantik

Aus mathematischer Sicht ist die Aussagenlogik im Wesentlichen nur eine andere Sichtweise der *Booleschen Algebra*, die sowohl zur reinen Mathematik als auch zur Informatik und digitalen Elektronik gehört. Allerdings ist die Aussagenlogik eine spezifisch *logische* Sicht auf die Boolesche Algebra, charakterisiert durch die typische Aufteilung in *Syntax* und *Semantik*. Auf der Seite der Syntax haben wir aussagenlogische Atome, die üblicherweise *aussagenlogische Variable* genannt werden, obwohl wir sie (je nach Standpunkt) mit gleichem Recht auch *aussagenlogische Konstante* nennen können. Diese Atome werden durch *Symbole* wie z.B. Buchstaben repräsentiert. Ein Vorrat von *logischen Symbolen* wie z.B. $\neg$ für die Negation oder $\wedge$ für die Konjunktion erlaubt es uns, aus den Atomen weitere Aussagen zusammenzusetzen wie z.B. $(A \wedge (\neg B))$. Diese zusammengesetzten Aussagen sind aus der Sicht der Syntax einfach nur *Zeichenketten* (auf Englisch und in der Computersprache *Strings*). Wenn wir nun die Atome mit einer Bedeutung versehen (A bedeutet, dass es regnet. B bedeutet, dass ich den

[1] Genauer: Das erste kategorische Urteil verknüpft zwei Eigenschaften A und B in beliebiger Reihenfolge, z.B. „Alle A sind B.“ oder „Kein B ist A.“ Das zweite verknüpft zwei Eigenschaften B und C, und die Konklusion verknüpft A und C, jeweils wiederum in beliebiger Reihenfolge.

Regenschirm dabei habe.), dann erhalten auch die zusammengesetzten Zeichenketten eine Bedeutung.

Durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entstand unter den Mathematikern erstmals ein Bewusstsein, dass ein Axiomensystem auch unbeabsichtigte Modelle (*Nicht-Standard-Modelle*) haben kann. Rein formales Schließen aus den Axiomen gewann dadurch an Bedeutung. In den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts verschärfte sich die Situation durch die Entdeckung der *Russelschen Antinomie*: Die naive Mengenlehre ist widersprüchlich, wie man leicht einsieht, indem man die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, betrachtet: $\{x \mid x \notin x\}$. Unsere heutige Lösung ist, dass diese „Menge" eben keine Menge ist sondern eine Klasse. (In der naiven Mengenlehre gibt es diese Unterscheidung nicht, und alle Mengen sind Klassen.) Aber was garantiert uns, dass wir damit alle Widersprüche beseitigt haben? Bertrand Russell und Alfred North Whitehead machten sich auf, mit den *Principia Mathematica* eine vollständige und solide Grundlage für die gesamte Mathematik zu legen.

Dazu brauchten sie zunächst einmal eine Logik, die ausdrucksstärker ist als die Aussagenlogik. Die Logik, die sie benutzten, ist als das „System der Principia Mathematica" bekannt. Sie ist im Wesentlichen identisch mit der *Prädikatenlogik erster Stufe*, die heute im Allgemeinen als die Logik der Wahl für die Grundlagen der Mathematik gilt. Die Syntax dieser Logik enthält Zeichenketten wie $\forall\epsilon(\epsilon > 0 \to \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall v(|x-v| < \delta \to |f(x)-f(v)| < \epsilon)))$. Um die Semantik festzulegen, muss man u.A. sagen, in welcher Menge die Variablen ihre Werte annehmen dürfen, z.B. in den reellen Zahlen.

Eine vollständige und solide Grundlage der Mathematik sollte insbesondere folgende Eigenschaften haben:

- Sie sollte ein Axiomensystem vollständig beschreiben, z.B. indem sie eine Vorschrift angibt, die alle Axiome erzeugt. (Also z.B. endlich viele einzelne Axiome und dazu endlich viele Axiomenschemata.)

- Das Axiomensystem muss konsistent sein. D.h. es muss auch (‚falsche') Aussagen geben, die nicht aus den Axiomen folgen. (Andernfalls könnte es wohl kaum ein Modell haben.)

- Es muss zumindest die Zahlentheorie vollständig abgedeckt sein. D.h., jede Aussage, die man in der Logik der ersten Stufe über die natürlichen Zahlen und ihre Addition, Multiplikation und lineare Ordnung treffen kann, muss ausdrückbar sein, und, falls sie wahr ist, aus den Axiomen folgen.

Beim Versuch, dieses Problem zu lösen, entstand allmählich der Eindruck, dass es vielleicht nicht geht. Der erste, dem es gelang, diese Unmöglichkeit zu beweisen, war Kurt Gödel. Die Idee für seinen *Unvollständigkeitssatz* ist wie folgt: Angenommen, es gäbe eine vollständige und solide Grundlage der Mathematik wie oben beschrieben. Die Zeichenketten der benutzten Logik ließen sich dann als natürliche Zahlen codieren. Die Definition des Axiomensystems ließe sich in eine Formel übersetzen, welche die entsprechenden Codes für die Axiome beschreibt. Letztlich ließe sich rein zahlentheoretisch ausdrücken: „Die Zahl n ist der Code für eine Zeichenkette, die einen Satz darstellt, der aus den Axiomen folgt.“. Nennen wir diese Aussage $\phi(n)$. Gödel gelang es, zu zeigen, dass es dann eine natürliche Zahl n geben muss mit der Eigenschaft, dass n der Code für den Satz $\neg\phi(n)$ ist. Damit haben wir ein Analogon zur Russelschen Antinomie: Falls $\neg\phi(n)$ gilt, dann folgt der von n codierte Satz (wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit) aus den Axiomen. D.h., es gilt $\phi(n)$, ein Widerspruch. Falls umgekehrt $\phi(n)$ gilt, dann folgt der von n codierte Satz natürlich nicht aus den Axiomen. D.h., es gilt $\neg\phi(n)$, ein erneuter Widerspruch.

Gödel war nicht nur der bedeutendste Logiker des 20. Jahrhunderts; er war auch wahnsinnig. Von Alfred Tarski, dem er mit dem Unvollständigkeitssatz zuvor kam, ist die unbescheidene Bemerkung überliefert, er selbst sei ‘the greatest living sane logician’. Man sagt der Logik nach, sie hätte viele Mathematiker in den Wahnsinn getrieben. (Eine deutsche Illustrierte enthielt einst einen mehrseitigen Artikel mit dem Titel „Gehen Sie der Logik aus dem Weg!“) Falls das wahr ist, ist es wohl vor allem die Schuld des Unvollständigkeitssatzes und verwandter Probleme. Wir werden den Satz daher nur so weit behandeln, dass Sie wissen, wovor Sie sich in Acht nehmen müssen.

Gödel wurde 1906 in Brünn geboren. Da er kaum Tschechisch sprach, fühlte er sich in der 1918 gegründeten Tschechoslowakischen Republik nicht wohl und wurde Österreicher. Er studierte in Wien zunächst Theoretische Physik, beschäftigte sich aber gleich auch mit Philosophie und Zahlentheorie. Obwohl er kein Jude war, war er gelegentlich vom Antisemitismus betroffen. Als er dann auch noch trotz seiner schweren psychischen Probleme zur Wehrmacht eingezogen werden sollte, wanderte er 1940 in die USA aus, wo er einige Jahre später eingebürgert wurde. Er unterstützte Albert Einstein bei mathematischen Problemen der Relativitätstheorie und entdeckte Lösungen von Einsteins Gleichungen, die Zeitreisen ermöglichen würden. 1978 starb er nach langer Krankheitsgeschichte durch Unterernährung in Folge krankhafter Angst vor Vergiftung.

1.2 Logiken

In gewissem Sinne ist dieses Kapitel noch Teil der Einführung. Wir werden eine konkrete Logik im Detail besprechen, aber nur, um den Eindruck zu vermeiden, dass Aussagenlogik und Prädikatenlogik die einzigen sinnvollen Logiken sind, und um den Blick für gewisse Probleme zu schärfen.

Eine *Zeichenkette* über einer Menge A ist ein endliches Tupel (eine endliche Folge) von Elementen aus A. Zeichenketten werden auch als *Wörter* oder *Strings* bezeichnet. Die Menge aller Zeichenketten über A, einschließlich der leeren Zeichenkette (mit Länge 0), wird mit A^* bezeichnet. Eine *formale Sprache* über einer Menge A ist ein Paar (L, A), bestehend aus einer Menge A und einer Menge $L \subseteq A^*$ von Zeichenketten über A. A heißt das *Alphabet* der Sprache. Meist identifiziert man (L, A) mit L, spricht also vom Alphabet von L, obwohl streng genommen A durch L nicht eindeutig bestimmt ist. Man kann das auch so ausdrücken: Eine formale Sprache ist eine Menge L von Zeichenketten über einer Menge A, und ist zusätzlich noch mit A, ihrem Alphabet, versehen.

Zum Beispiel ist die Menge

$$L_\pi = \{\texttt{"3"}, \texttt{"3,1"}, \texttt{"3,14"}, \texttt{"3,142"}, \texttt{"3,1416"}, \texttt{"3,14159"}, \texttt{"3,141593"}, \ldots\}$$

von Approximationen von π in Dezimalbruchschreibweise eine formale Sprache über dem Alphabet

$$A = \{\texttt{,}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{-}\}.$$

(Die *Menge* L könnte man natürlich ebensogut als Sprache über dem Alphabet $A' = A \backslash \{\texttt{-}\}$ auffassen. Die beiden formalen Sprachen sind dann allerdings streng genommen verschieden, weil sie nicht dasselbe Alphabet haben.)

Formale Sprachen treten in der Logik immer wieder im Zusammenhang mit der Syntax von Logiken auf. Wirklich zentral sind sie jedoch in der Linguistik (Noam Chomskys Hierarchive der formalen Grammatiken) und der theoretischen Informatik.

In dieser Vorlesung[2] definieren wir Logiken als mathematische Objekte wie folgt: Eine *Logikinstanz* ist ein Tripel $\mathcal{L} = (L, \mathcal{M}, \models)$ bestehend aus einer formalen Sprache L, einer Menge (oder Klasse) $\mathcal{M}$ und einer Relation $\models$ zwischen $\mathcal{M}$ und L, d.h. $\models \subseteq \mathcal{M} \times L$. L heißt die Sprache von $\mathcal{L}$; ihre Elemente heißen *Sätze*. Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen die *Modelle* oder *Interpretationen* für $\mathcal{L}$. Falls $M \in \mathcal{M}$ ein Modell für $\mathcal{L}$ ist und $\phi \in L$ ein Satz von $\mathcal{L}$, dann schreiben wir $M \models \phi$ falls $(M, \phi) \in \models$, und sonst $M \not\models \phi$. Die Relation $\models$ heißt übrigens *Modellrelation*.

Wir können die Formale Sprache L_π zu einer (recht sinnlosen) Logik machen, indem wir $\mathcal{M}_\pi = \mathbb{N}$ setzen und als $\models_\pi$ die Menge aller Paare $(n, \phi) \in L_\pi \times \mathbb{N}$ wählen, so dass n die Zahl der Zeichen hinter dem Komma ist (bzw. 0 falls ϕ kein Komma enthält).[3] Also z.B. $2 \models \texttt{3,14}$, aber $0 \not\models \texttt{3,14159}$.

Eine *Logik* ist (in dieser Vorlesung) ein Paar $(S, \mathcal{L})$ bestehend aus einer Menge (oder Klasse) S und einer Funktion $\mathcal{L}$, die jedem Element $\sigma \in S$ eine Logikinstanz $\mathcal{L}_\sigma$ zuordnet. Die Elemente von S heißen die *Signaturen* für die Logik $\mathcal{L}$. Auch wenn wir formal mit Logiken arbeiten, werden wir natürlich meist auf der Ebene der Logikinstanzen denken: Es macht meist keinen Unterschied, wenn wir uns die Signatur als konstant vorgegeben vorstellen.

Wir setzen unser sinnloses Beispiel fort. Analog zu $\mathcal{L}_\pi$ können wir für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine formale Sprache L_x definieren, z.B.:

$$L_{\frac{1}{4}} = \{\texttt{"0"}, \texttt{"0,3"}, \texttt{"0,25"}, \texttt{"0,250"}, \texttt{"0,2500"}, \texttt{"0,25000"}, \texttt{"0,250000"}, \ldots\}$$

[2] Obwohl in der Logik immer wieder von „Logiken“ die Rede ist, ist es noch kaum üblich, Logiken als mathematische Objekte zu betrachten, und es gibt keine einheitliche Definition von „Logiken“. Das geht so weit, dass die Semantik einer Logik manchmal als Teil der betreffenden Logik aufgefasst wird und manchmal als zusätzliche Information, die eigentlich nicht dazugehört. Die folgende Definition ist eine vereinfachte Fassung von Definitionen, die gelegentlich in der Abstrakten Logik und der Institutionellen Modelltheorie verwendet werden.

[3] In der Logik wird die Zahl 0 generell als eine natürliche Zahl angesehen. Wir werden hier, anders als sonst in der Logik üblich, $\mathbb{N}$ und nicht ω für die Menge der natürlichen Zahlen schreiben. Also $0 \in \mathbb{N}$.

$$L_{-10} = \{\texttt{"-10"}, \texttt{"-10,0"}, \texttt{"-10,00"}, \texttt{"-10,000"}, \texttt{"-10,0000"}, \dots\}.$$

Sei außerdem $\mathcal{M}_x = \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und sei $\models_x$ analog zu $\models_\pi$ definiert. Dann sind die Tupel $\mathcal{L}_x = (L_x, \mathcal{M}_x, \models_x)$ Logikinstanzen, und $\mathcal{L}$ ist eine Logik.

Wir kommen nun zu einem sinnvolleren Beispiel. Sei S die Klasse aller Mengen. Für jede Menge $\sigma \in S$ definieren wir eine Logikinstanz $\mathcal{L}_\sigma = (L_\sigma, \mathcal{M}_\sigma, \models)$ wie folgt:

Sei $A_\sigma = \{\texttt{A}, \texttt{E}, \texttt{I}, \texttt{O}\} \cup \sigma$ und $L_\sigma = \{\texttt{A}, \texttt{E}, \texttt{I}, \texttt{O}\} \times \sigma \times \sigma$. Das heißt, alle Zeichenketten in L_σ haben die Länge 3 und sind von der Form "$\texttt{A}\ ab$", "$\texttt{E}\ ab$", "$\texttt{I}\ ab$" oder "$\texttt{O}\ ab$", wobei $a, b \in \sigma$ Elemente von σ sind. Als Modelle für $\mathcal{L}_\sigma$ nehmen wir alle Abbildungen $\sigma \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, d.h. wir setzen $\mathcal{M}_\sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})^\sigma$. Die Modellrelation $\models_\sigma$ definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
M \models_\sigma \texttt{A}ab &\iff M(a) \subseteq M(b) \\
M \models_\sigma \texttt{E}ab &\iff M(a) \cap M(b) = \emptyset \\
M \models_\sigma \texttt{I}ab &\iff M(a) \cap M(b) \neq \emptyset \\
M \models_\sigma \texttt{O}ab &\iff M(b) \not\subseteq M(a).
\end{aligned}$$

Die so definierte Logik $\mathcal{L}$ ist die Logik der kategorischen Urteile im Sinne von Aristoteles. Die Elemente einer Signatur σ repräsentieren die Prädikate (z.B. „ist ein Minister“, „ist kriminell“). Ein Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ gibt für jedes Prädikat $a \in \sigma$ an, welche natürlichen Zahlen (die hier stellvertretend für beliebige Objekte stehen) dieses Prädikat erfüllen. Diese bilden die Menge $M(a)$. Die Sätze (= Wörter) der Sprache L_σ sind die kategorischen Urteile, und $M \models_\sigma \phi$ bedeutet, dass das kategorische Urteil ϕ im Modell M zutreffend ist.

Die Syllogismen sind nun die Tripel $(\phi_1, \phi_2, \psi) \in L_\sigma^3$, welche die im letzten Kapitel angegebene Einschränkung bezüglich des Vorkommens von Prädikaten erfüllen. Genauer, die Menge aller Syllogismen zur Signatur σ ist die Menge

$$\begin{aligned}
\big\{&(Xab, Ybc, Zac), (Xab, Ybc, Zac), \\
&(Xab, Ycb, Zac), (Xab, Ycb, Zac), \\
&(Xab, Ybc, Zca), (Xab, Ybc, Zca), \\
&(Xab, Ycb, Zca), (Xab, Ycb, Zca) \\
&\quad \big| \quad X, Y, Z \in \{\texttt{A}, \texttt{E}, \texttt{I}, \texttt{O}\},\ a, b, c \in \sigma\big\}
\end{aligned}$$

Ein Syllogismus $(\phi_1, \phi_2, \psi) \in L_\sigma^3$ ist gültig, falls für *jedes* Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ gilt: Falls $M \models_\sigma \phi_1$ und $M \models_\sigma \phi_2$, so auch $M \models_\sigma \psi$.

Die gültigen Syllogismen liefern unser erstes Beispiel für einen *logischen Kalkül*. Wir beginnen mit einer grundlegenden Definition, die auf Kuratowski und Tarski zurückgeht:

Ein *Hüllenoperator* über einer Menge X ist ein extensiver, monotoner, idempotenter Operator auf X. Mit anderen Worten, man versteht darunter eine Abbildung $h\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ (die also jeder Teilmenge von X eine Teilmenge von X zuordnet), welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

Extensivität $A \subseteq h(A)$

Monotonie $A \subseteq B \implies h(A) \subseteq h(B)$

Idempotenz $h(h(A)) = h(A)$.

Dieser Begriff wurde etwa gleichzeitig (und am selben Ort, der Universität Warschau) von Kuratowski eingeführt, um die topologische Hülle in allgemeinen topologischen Räumen zu axiomatisieren, und von Tarski, um logische Konsequenz abstrakt zu beschreiben. Bei Kuratowski kam dementsprechend noch das Axiom $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$ hinzu. Tarski dagegen interessierte sich vor allem für *finitäre Hüllenoperatoren*, das heißt solche, für die $h(A)$ die Vereinigung der Mengen $h(A')$ für alle endlichen Teilmengen $A' \subseteq A$ ist.

Ein logischer Kalkül (im weitesten Sinne) für eine Logik $\mathcal{L}$ ist nun eine Funktion K, die uns für jede Signatur σ von $\mathcal{L}$ einen Hüllenoperator K_σ auf der formalen Sprache L_σ liefert. Der wichtigste logische Kalkül ist der von der Semantik induzierte: Wir sagen, dass ein Satz $\psi \in L_\sigma$ aus einer Menge $\Phi \subseteq L_\sigma$ von Sätzen semantisch folgt, falls jedes Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$, das alle Sätze in Φ erfüllt, auch ψ erfüllt:

$$M \models_\sigma \Phi \implies M \models_\sigma \psi.$$

In diesem Fall schreiben wir $\Phi \models_\sigma \psi$. Wir können nun leicht überprüfen, dass $K_\sigma(\Phi) = \{\psi \in L_\sigma \mid \Phi \models_\sigma \psi\}$ einen Hüllenoperator definiert.

Die drei wichtigsten Eigenschaften, die man sich von einem beliebigen logischen Kalkül wünscht, sind die folgenden:

- Er muss korrekt sein, d.h. wenn $\psi \in K_\sigma(\Phi)$ ist, dann soll auch $\Phi \models_\sigma \psi$ gelten.
- Er sollte vollständig sein, d.h. wenn $\Phi \models_\sigma \psi$, dann sollte auch $\psi \in K_\sigma(\Phi)$ sein.
- Er sollte finitär sein.

Die semantische Konsequenz ist natürlich immer korrekt und vollständig. Sie muss aber nicht immer finitär sein – obwohl sie es meist ist. Da die semantische Konsequenz nicht leicht zu überprüfen ist, hat schon Aristoteles mit einem Katalog von als gültig angesehenen Schlüssen gearbeitet:

$$\begin{gathered}\{\mathtt{A}ba, \mathtt{A}cb\} \models \mathtt{A}ca,\\ \{\mathtt{E}ba, \mathtt{A}cb\} \models \mathtt{E}ca,\\ \ldots\end{gathered}$$

Zum Abschluss unserer Beschäftigung mit der Antike drei Übungsaufgaben:

- Gegeben (für jede Signatur) eine Menge von Syllogismen. Wie können wir daraus sinnvoll einen logischen Kalkül definieren, d.h. für jede Signatur σ einen Hüllenoperator K_σ auf L_σ?

- Der so gewonnene Kalkül muss finitär sein.
- Die Menge der laut Aristoteles gültigen Syllogismen umfasste auch einige, die den heutigen Philosophen das Leben[4] schwer machen. Einer davon ist als *modus barbari* bekannt: $\{\mathtt{A}ba, \mathtt{A}cb\} \models \mathtt{I}ca$. Kann der zugehörige Kalkül im Sinne der von uns definierten Logik korrekt gewesen sein?

[4]Genau genommen: das Interpretieren von Aristoteles.

Kapitel 2

Aussagenlogik

2.1 Definition der Aussagenlogik

Signaturen

Eine *aussagenlogische Signatur* ist einfach eine Menge. Ihre Elemente repräsentieren die atomaren Sätze, d.h. Behauptungen, die wahr oder falsch sein können, und deren interne Struktur oder Zusammenhang untereinander uns nicht interessiert.

Semantik

Ein *Modell* für eine aussagenlogische Signatur σ ist eine Abbildung $M\colon \sigma \to \mathbb{B}$ von σ in die Menge $\mathbb{B} = \{\bot, \top\}$ der beiden Wahrheitswerte $\bot$ (*falsum*, falsch) und $\top$ (*verum*, wahr). Man spricht auch von einer *Interpretation* für σ. Falls $M(A) = \top$ ist, sagen wir, dass der atomare Satz A in M gilt, und schreiben $M \models A$. Falls dagegen $M(A) = \bot$ ist, sagen wir, dass A in M nicht gilt und schreiben $M \not\models A$. Wir setzen $\mathcal{M}_\sigma = \{M \mid M \text{ ist ein Modell für } \sigma\}$.

Aufgabe: Wieviele verschiedene Modelle hat eine aussagenlogische Signatur mit 8 Elementen?

Syntax

Sei σ eine aussagenlogische Signatur. Wir definieren die zugehörige Sprache L_σ der Aussagenlogik wie folgt. Ihr Alphabet ist die Menge $A_\sigma = \{\wedge, \vee, \neg, \texttt{)}, \texttt{(}\} \cup \sigma$. Die Symbole $\wedge, \vee, \neg$ heißen *logische Konnektoren*.

- Jedes Element von σ ist in L_σ.
- Falls $\varphi \in L_\sigma$, so auch $(\neg\varphi) \in L_\sigma$.
- Falls $\varphi, \psi \in L_\sigma$, so auch $(\varphi \wedge \psi) \in L_\sigma$.
- Falls $\varphi, \psi \in L_\sigma$, so auch $(\varphi \vee \psi) \in L_\sigma$.

Ferner legen wir fest, dass $L_\sigma \subseteq A_\sigma^*$ die kleinste Menge mit den vorstehenden Eigenschaften ist. Dadurch ist L_σ eindeutig bestimmt, und es ist zudem möglich, über L_σ Induktionsbeweise zu führen so wie über die natürlichen Zahlen.

Als Beispiel für einen Induktionsbeweis zeigen wir: Die Anzahl der Elemente von σ in einem Satz in L_σ ist genau 1 plus die Anzahl der Konnektoren $\wedge$ oder $\vee$. Hierbei zählen wir Symbole, die mehrmals auftreten, auch mehrmals. In anderen Worten: Für $\varphi \in L_\sigma$ definieren wir $a(\varphi)$ als die Anzahl der Positionen in der Zeichenkette φ, an denen ein atomarer Satz steht, d.h. ein Element von σ, und $b(\varphi)$ als die Anzahl der Positionen, an denen einer der beiden zweistelligen logischen Konnektoren $\wedge$ und $\vee$ steht. Dann ist immer $a(\varphi) = b(\varphi) + 1$.

Der Beweis geht im Prinzip genau wie ein Induktionsbeweis über die natürlichen Zahlen. Allerdings haben wir nun mehrere Induktionsbasen, die wir *alle* überprüfen müssen: die Elemente von σ. In der Tat tritt in jedem Satz der Form A, mit $A \in \sigma$, genau einmal ein Element von σ auf und gar keiner der Konnektoren $\wedge, \vee$. Somit ist $a(A) = 1$ und $b(A) = 0$, also $a(A) = b(A) + 1$. Wir müssen auch mehrere Arten von Induktionsschlüssen überprüfen: Wenn φ die Bedingung erfüllt, so sicher auch $\neg\varphi$: $a(\neg A) = a(A) = b(A) + 1 = b(\neg A) + 1$. Wenn φ und ψ die Bedingung erfüllen, so auch $(\varphi \wedge \psi)$:

$$\begin{aligned} a((\varphi \wedge \psi)) &= a(\varphi) + a(\psi) \\ &= b(\varphi) + 1 + b(\psi) + 1 \\ b((\varphi \wedge \psi)) &= b(\varphi) + 1 + b(\psi). \end{aligned}$$

Genauso überprüfen wir auch, dass wenn φ und ψ die Bedingung erfüllen, auch $(\varphi \vee \psi)$ es tut.

Falls Ihnen diese Art von Induktionsbeweis ungewohnt und noch etwas unheimlich ist, können Sie sich als Aufgabe überlegen, wie man das so übersetzen kann, dass der Beweis statt dessen per Induktion über die Länge der Sätze geht.

Satz von der eindeutigen Lesbarkeit Jeder Satz $\varphi \in L_\sigma$ erfüllt genau eine der folgenden Bedingungen:

- φ ist von der Länge 1 und besteht aus einem einzigen Symbol, einem Element von σ.
- φ ist von der Form $(\neg\psi)$, für einen Satz $\psi \in L_\sigma$.
- φ ist von der Form $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, für zwei Sätze $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$.
- φ ist von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$, für zwei Sätze $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$.

Darüber hinaus ist im zweiten Fall der Satz ψ, und sind im dritten und vierten Fall die Sätze ψ_1 und ψ_2 eindeutig bestimmt.

Modellbeziehung

Zur Erinnerung: Um eine Logikinstanz zu definieren, brauchen wir eine Sprache (in diesem Fall: L_σ), die Klasse der Modelle (in diesem Fall: $\mathcal{M}_\sigma$) und eine Modellrelation $\models \subseteq \mathcal{M}_\sigma \times L_\sigma$. Wir müssen daher nur noch für alle Modelle

$M \in \mathcal{M}_\sigma$ festlegen, ob $M \models \sigma$ gilt. Sei z.B. $\sigma = \{A, B, C\}$. Dann ist ein Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ eine Abbildung $M\colon \{A, B, C\} \to \mathbb{B}$. Beispielsweise:

$$\begin{aligned} M\colon \{A, B, C\} &\to \mathbb{B} \\ A &\mapsto \top \\ B &\mapsto \bot \\ C &\mapsto \bot. \end{aligned}$$

Bei der Definition der Semantik haben wir bereits festgelegt, dass dann gelten soll:

$$\begin{aligned} M &\models A \\ M &\not\models B \\ M &\not\models C. \end{aligned}$$

Damit ist aber a priori noch nicht klar, ob denn nun beispielsweise

$$M \models \texttt{((}A \land \neg C\texttt{)} \lor B\texttt{)}$$

gelten soll oder nicht. Die Symbole $\neg$, $\land$ und $\lor$ sollen für *nicht, und* und *oder* stehen, so dass die obige Formel „(A und nicht B) oder C" ‚bedeutet'. Diese Idee drücken wir nun durch Induktion über die Sätze von L_σ aus, so dass wir später auch Behauptungen über die Modellbeziehung durch Induktion beweisen können. Dieses Vorgehen ist als *Tarskis Definition der Wahrheit* oder *Schema T* bekannt:

Ob für ein Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ und einen Satz $\varphi \in L_\sigma$ die Beziehung $M \models \varphi$ gilt, ist induktiv wie folgt definiert:

- Falls φ ein einziges Symbol $S \in \sigma$ ist, so gilt $M \models \varphi$ genau dann, wenn $M(S) = \top$.
- Falls φ von der Form $\texttt{(}\neg\psi\texttt{)}$ ist mit $\psi \in L_\sigma$, so gilt $M \models \varphi$ genau dann, wenn $M \models \psi$ nicht gilt.
- Falls φ von der Form $\texttt{(}\psi_1 \land \psi_2\texttt{)}$ ist, für zwei Sätze $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$, so gilt $M \models \varphi$ genau dann, wenn sowohl $M \models \psi_1$ als auch $M \models \psi_2$ gilt.
- Falls φ von der Form $\texttt{(}\psi_1 \lor \psi_2\texttt{)}$ ist, für zwei Sätze $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$, so gilt $M \models \varphi$ genau dann, wenn $M \models \psi_1$ oder $M \models \psi_2$ gilt.

Varianten und Abkürzungen

Neben $\neg$, $\land$ und $\lor$ gibt es noch weitere logische Konnektoren, die wir jedoch in unserer Definition nicht benutzt haben. Das ist auch nicht nötig, weil wir sie als ‚Abkürzungen' für kompliziertere Formeln auffassen können. Wenn wir beispielsweise „Aus φ folgt ψ" als Formel ausdrücken wollen, so können wir dafür $\texttt{(}\varphi \to \psi\texttt{)}$ schreiben als ‚Abkürzung' für die Formel $\texttt{((}\neg\varphi\texttt{)} \lor \psi\texttt{)}$. Entsprechend ist $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ eine ‚Abkürzung' für $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$, und dies wiederum für $(((\neg\varphi) \vee \psi) \wedge ((\neg\psi) \vee \varphi))$.

Wir hätten die Symbole $\to$ und $\leftrightarrow$, und viele weitere, auch gleich in die Sprache mit aufnehmen können. In diesem Fall hätten wir bisher bei jeder induktiven Definition und jedem induktiven Beweis weitere Fälle berücksichtigen müssen, und müssten dies auch weiterhin tun. Diese Arbeit wollen wir uns sparen.

Aufgabe: Wir hätten uns auch einen der beiden Konnektoren $\wedge$ oder $\vee$ sparen können.

Ein besonderer Fall sind die beiden nullstelligen Konnektoren $\top$ und $\bot$, die konstant wahr bzw. konstant falsch sind. Für eine beliebige nichtleere Signatur $\sigma \neq \emptyset$ kann man sich einfach einen Satz $S \in \sigma$ hernehmen und $\top$ als ‚Abkürzung' für $(S \vee (\neg S))$ auffassen, sowie $\bot$ als ‚Abkürzung' für $(S \wedge (\neg S))$. Aber für $\sigma = \emptyset$ geht das nicht. In der Tat ist nach unserer Definition $L_\emptyset = \emptyset$, und dies wäre nicht mehr der Fall, wenn wir, wie eigentlich sinnvoll (aber unüblich), einen oder beide nullstelligen Konnektoren in unser Alphabet mit aufgenommen hätten.

Die Verwendung von Klammern (`(`, `)`) ist mathematisch gesehen nicht sonderlich elegant. Eleganter wäre es, statt Infixnotation $(\varphi \wedge \psi)$ die polnische Notation zu verwenden: $(\wedge \varphi\psi)$. Dadurch wären auch die Klammern überflüssig. Statt $((A \wedge \neg C) \vee B)$ würden wir z.B. schreiben: $\vee \wedge A \neg C B$. Eine solche Variante ließe sich auch zwanglos auf drei- und mehrstellige logische Konnektoren erweitern.

Alle diese Varianten kommen irgendwo in der Literatur vor, und jede hat ihre Vor- und Nachteile. Ich habe für diese Vorlesung die vielleicht konventionellste Wahl getroffen: Infixnotation, weil sie uns allen am vertrautesten ist, und die Konnektoren $\neg, \wedge, \vee$, weil sie den üblichen Verknüpfungen der Booleschen Algebra entsprechen. Letztlich macht das jedoch keinen großen Unterschied, da man von jeder gebräuchlichen Syntax der Aussagenlogik leicht in jede andere übersetzen kann.

2.2 Ein vollständiger Kalkül

Zur Erinnerung: Wenn Φ eine Menge von Sätzen ist und ψ ein weiterer Satz, alle über derselben Signatur σ, dann bedeutet $\Phi \models_\sigma \psi$, dass jedes Modell von Φ auch ein Modell von ψ ist. In anderen Worten: Falls $M \models_\sigma \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$, so auch $M \models_\sigma \psi$. Indem wir $K_\sigma^{\models}(\Phi) = \{\psi \in L_\sigma \mid \Phi \models_\sigma \psi\}$ setzen, können wir diese Relation als einen Kalkül auffassen.

Wir werden nun für die Aussagenlogik einen weiteren Kalkül definieren, indem wir eine weitere Relation $\vdash_\sigma \subseteq \mathcal{P}(L_\sigma) \times L_\sigma$ zwischen Teilmengen von L_σ und einzelnen Sätzen von L_σ einführen.

- Für alle $\varphi \in L_\sigma$ gilt: $\{\varphi\} \vdash_\sigma \varphi$.
- Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \subseteq \Psi$, so auch $\Psi \vdash_\sigma \alpha$.
- Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \vdash_\sigma \beta$, so auch $\Phi \vdash_\sigma (\alpha \wedge \beta)$.

- Falls $\Phi \vdash_\sigma (\alpha \wedge \beta)$, so auch $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \vdash_\sigma \beta$.
- Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ oder $\Phi \vdash_\sigma \beta$, so auch $\Phi \vdash_\sigma (\alpha \vee \beta)$.
- Falls $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_\sigma \gamma$ und $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_\sigma \gamma$, so auch $\Phi \cup \{(\alpha \vee \beta)\} \vdash_\sigma \gamma$.
- Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \vdash_\sigma (\neg\alpha)$, so auch $\Phi \vdash_\sigma \beta$.
- Falls $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_\sigma \beta$ und $\Phi \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash_\sigma \beta$, so auchh $\Phi \vdash_\sigma \beta$.

Die Relation $\vdash_\sigma$ ist definiert als die kleinste Menge $\vdash \subseteq \mathcal{P}(L_\sigma) \times L_\sigma$, welche diese Regeln erfüllt. All diese Regeln gelten offenbar auch für $\models_\sigma$. Wenn wir versuchen, weitere Regeln hinzuzufügen, die ebenfalls für $\models_\sigma$ gelten, werden sie sich als ableitbar aus den bisherigen herausstellen. Zum Beispiel:
Schnittregel: Falls $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ und $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_\sigma \beta$, so auch $\Phi \vdash_\sigma \beta$.

Beweis: Wegen $\Phi \vdash_\sigma \alpha$ gilt auch $\Phi \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash_\sigma \alpha$. Andererseits gilt ohnehin $\Phi \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash_\sigma (\neg\alpha)$. Aus beidem zusammen folgt $\Phi \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash_\sigma \beta$. Zusammen mit $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_\sigma \beta$ erhalten wir wie behauptet $\Phi \vdash_\sigma \beta$.

Aus den Relationen $\vdash_\sigma$ (für alle Signaturen σ) erhalten wir einen Kalkül $K^\vdash$, definiert durch $K^\vdash_\sigma(\Phi) = \{\psi \in L_\sigma \mid \Phi \vdash_\sigma \psi\}$. (Es ist einfach nachzuprüfen, dass $K^\vdash_\sigma$ ein Hüllenoperator ist. Extensivität und Monotonie folgen aus den ersten beiden Regeln für $\vdash_\sigma$, und Idempotenz folgt aus der Schnittregel.)
Korrektheitssatz: Falls $\Phi \vdash_\sigma \psi$, so auch $\Phi \models_\sigma \psi$.

Beweis: Es genügt, zu überprüfen, dass auch die aus der Modellrelation abgeleitete Relation $\models \subseteq \mathcal{P}(L_\sigma) \times L_\sigma$ die obigen Bedingungen erfüllt. Weil $\vdash_\sigma$ als die kleinste solche Relation definiert ist, gilt dann $\vdash_\sigma \subseteq \models_\sigma$, was äquivalent zur Behauptung ist.

Wirklich abgesehen haben wir es aber auf den
Vollständigkeitssatz: Falls $\Phi \models_\sigma \psi$, so auch $\Phi \vdash_\sigma \psi$.

Den Vollständigkeitssatz werden wir am Ende dieses Abschnitts beweisen. Der Korrektheits- und Vollständigkeitssatz zusammen besagen, dass die durch $\vdash$ und $\models$ definierten Kalküle übereinstimmen: $K^\vdash = K^\models$, bzw. $\Phi \vdash_\sigma \psi \iff \Phi \models_\sigma \psi$.

2.2.1 Erfüllbarkeit und Konsistenz

Bisher haben wir mit zwei verschiedenen Schreibweisen von Kalkülen gearbeitet, $\models$ / $\vdash$ und $K^\models / K^\vdash$. Die beiden sind durch die folgenden Beziehungen miteinander verknüpft:

$$\Phi \models_\sigma \psi \iff K^\models_\sigma(\Phi) \ni \psi$$
$$\Phi \vdash_\sigma \psi \iff K^\vdash_\sigma(\Phi) \ni \psi$$

Diese Art von Übersetzung ist natürlich für jeden Kalkül (für jede Logik) möglich. Unsere speziellen Kalküle für die Aussagenlogik lassen sich jedoch auch über den Begriff der Erfüllbarkeit bzw. Konsistenz charakterisieren:

Eine Menge $\Phi \subseteq L_\sigma$ von Sätzen heißt *erfüllbar*, falls sie ein Modell hat, d.h. falls es ein Modell $M \in \mathcal{M}_\sigma$ gibt, so dass $M \models \Phi$. Andernfalls heißt Φ *unerfüllbar*.

Eine Menge $\Phi \subseteq L_\sigma$ heißt *inkonsistent*, falls jeder Satz in L_σ im $\vdash$-Kalkül aus ihr gefolgert werden kann, d.h. wenn $K^\vdash = L_\sigma$. Sie heißt *konsistent*, falls es einen Satz gibt, der im $\vdash$-Kalkül nicht aus ihr gefolgert werden kann, wenn also $K^\vdash \subsetneq L_\sigma$.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass eine Satzmenge genau dann erfüllbar ist, wenn sie konsistent ist, und damit den Vollständigkeitssatz zu beweisen. Aber zunächst schauen wir uns an, was im Sonderfall der leeren Signatur geschieht. Für $\sigma = \emptyset$ ist $L_\sigma = \emptyset$, und deshalb gibt es nur eine Satzmenge $\Phi \subseteq L_\sigma$, nämlich $\Phi = \emptyset$. Diese ist erfüllbar, denn es gibt tatsächlich ein Modell für σ: $\mathcal{M}_\sigma$ hat als einziges Element die einzige Funktion $M \colon \emptyset \to \mathbb{B}$. $\Phi = \emptyset$ ist aber inkonsistent, weil es in L_σ gar keine Sätze gibt, die also alle aus Φ folgen.

Der Zusammenhang zwischen Erfüllbarkeit/Konsistenz und den beiden Kalkülen $\models$ und $\vdash$ ist wie folgt:

$$
\begin{array}{lcr}
\Phi \models_\sigma \psi & \iff & \Phi \cup \{(\neg\psi)\} \text{ ist unerfüllbar} \\
\Phi \models_\sigma (\neg\psi) & \iff & \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar} \\
\Phi \vdash_\sigma \psi & \iff & \Phi \cup \{(\neg\psi)\} \text{ ist inkonsistent} \\
\Phi \vdash_\sigma (\neg\psi) & \iff & \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist inkonsistent.}
\end{array}
$$

Die ersten beiden Behauptungen sind offensichtlich. Beweis der dritten Behauptung: Aus $\Phi \vdash_\sigma \psi$ folgt $\Phi \cup \{(\neg\psi)\} \vdash_\sigma (\psi \wedge (\neg\psi))$. Andererseits gilt $\{(\psi \wedge (\neg\psi))\} \vdash_\sigma \chi$ für alle $\chi \in L_\sigma$. Mit der Schnittregel erhalten wir $\Phi \cup \{(\neg\psi)\} \vdash \chi$ für alle $\chi \in L_\sigma$, d.h. $\Phi \cup \{(\neg\psi)\}$ ist inkonsistent. Wenn umgekehrt $\Phi \cup \{(\neg\psi)\}$ inkonsistent ist, dann folgt insbesondere $\Phi \cup \{(\neg\psi)\} \vdash_\sigma \psi$. Andererseits gilt natürlich auch $\Phi \cup \{\psi\} \vdash_\sigma \psi$. Aus beidem zusammen können wir $\Phi \vdash_\sigma \psi$ schließen. Die vierte Behauptung wird ganz ähnlich bewiesen.

Eine Menge $\Phi \subset L_\sigma$ heißt *maximal konsistent* falls sie konsistent ist (d.h. $\Phi \subsetneq L_\sigma$) und es keine Menge Ψ gibt mit $\Phi \subsetneq \Psi \subsetneq L_\sigma$.

Satz von Lindenbaum: Sei $\sigma \neq \emptyset$. Jede konsistente Menge $\Phi \subset L_\sigma$ lässt sich erweitern zu einer maximal konsistenten Menge $\Psi \subseteq L_\sigma$.

Beweis: Mit dem Zornschen Lemma.

Wir können nun (ebenfalls unter der Voraussetzung $\sigma \neq \emptyset$) zeigen, dass jede konsistente Menge $\Phi \subseteq L_\sigma$ erfüllbar ist. Nach dem Satz von Lindenbaum genügt es zu zeigen, dass jede maximal konsistente Menge Φ erfüllbar ist. Wie man leicht nachprüft, hat eine solche Menge die Eigenschaft, dass $\Phi \vdash_\sigma (\neg\psi)$ äquivalent ist zu $\Phi \nvdash_\sigma \psi$. Wenn wir das auf atomare Sätze $A \in \sigma$ anwenden, sehen wir, dass wir bei der Definition eines Modells M gar keine Wahl haben: *Entweder* gilt $\Phi \vdash A$, *oder* $\Phi \vdash (\neg A)$. Im ersteren Fall muss $M \models_\sigma A$ gelten, und wir setzen daher $M(A) = \top$. Im letzteren müssen wir $M(A) = \bot$ setzen, damit $M \models_\sigma \neg A$. Nun können wir durch Induktion über die Formeln zeigen, dass für jede Formel $\psi \in L_\sigma$ gilt: $M \models_\sigma \psi \iff \Phi \vdash_\sigma \psi$.

Für $\sigma \neq \emptyset$ folgt somit, dass Erfüllbarkeit und Konsistenz äquivalent sind und folglich auch der Vollständigkeitssatz gilt. Für $\sigma = \emptyset$ gilt der Vollständigkeitssatz aber trivialerweise, da es gar keine Sätze $\psi \in L_\emptyset$ gibt.

Aus dem Vollständigkeitssatz folgt relativ leicht der
Kompaktheitssatz: Wenn jede endliche Teilmenge von $\Phi \subseteq L_\sigma$ erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar.

Im Beweis können wir $\sigma \neq \emptyset$ annehmen, da die Behauptung für $\sigma = \emptyset$ trivial ist. Wir überprüfen hierzu: Wenn jede endliche Teilmenge von $\Phi \subseteq L_\sigma$ konsistent ist, dann ist auch Φ konsistent. Dazu definieren wir die Relation $\Phi \vdash'_\sigma \psi$ als: Für eine endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ gilt $\Phi' \vdash_\sigma \psi$. Auch diese Relation erfüllt alle Regeln, die $\vdash$ definieren. Da wir $\vdash$ als die kleinste solche Relation definiert haben, gilt $\vdash \subseteq \vdash'$. Andererseits gilt offensichtlich $\Phi \vdash' \psi \implies \Phi \vdash \psi$, d.h. $\vdash' \subseteq \vdash$.

Kapitel 3

Universelle Algebra

3.1 Universelle Algebra als Logik

Zur Erinnerung: Definition von Gruppe, Ring (mit 1), $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Signaturen

Eine *funktionale Signatur* ist eine Menge F von *Funktionssymbolen* zusammen mit einer Funktion $\operatorname{ar}\colon F \to \mathbb{N}$, die jedem Funktionssymbol eine natürliche Zahl, seine *Stelligkeit*, zuordnet.

Einige Beispiele von Signaturen $\sigma = (F, \operatorname{ar})$:

- $F = \{+, -, 0\}$; $\operatorname{ar}(+) = 2$, $\operatorname{ar}(-) = 1$, $\operatorname{ar}(0) = 0$.
- $F = \{\cdot, {}^{-1}, 1\}$; $\operatorname{ar}(\cdot) = 2$, $\operatorname{ar}({}^{-1}) = 1$, $\operatorname{ar}(1) = 0$.
- $F = \{+, -, 0, \cdot, 1\}$; $\operatorname{ar}(+) = 2$, $\operatorname{ar}(-) = 1$, $\operatorname{ar}(0) = 0$, $\operatorname{ar}(\cdot) = 2$, $\operatorname{ar}(1) = 0$.

Semantik

Sei $\sigma = (F, \operatorname{ar})$ eine funktionale Signatur. Eine *universelle σ-Algebra M* ist eine Menge $|M|$ zusammen mit je einer $\operatorname{ar} f$-stelligen Funktion $f^M\colon |M|^{\operatorname{ar} f} \to |M|$ für jedes Funktionssymbol $f \in F$. Ein Modell für σ ist eine universelle σ-Algebra.

Beispielsweise können wir jede Gruppe G als eine universelle Algebra auffassen, indem wir als $|G|$ die Elemente der Gruppe nehmen, als $\cdot^M$ die Gruppenmultiplikation, als $({}^{-1})^M$ die Abbildung, die jedem Gruppenelement sein Inverses zuordnet, und als 1^M das neutrale Element der Gruppe. Eine universelle Algebra mit derselben Signatur muss aber keine Gruppe sein, da wir die Gruppenaxiome nicht gefordert haben.

Eine Abbildung $h\colon |M| \to |N|$ zwischen zwei universellen σ-Algebren heißt ein *Homomorphismus*, falls h mit den Interpretationen der Funktionssymbole vertauscht. In anderen Worten, für alle Funktionssymbole f von σ muss die Bedingung $h \circ f^M = f^N \circ h^{\operatorname{ar} f}$ gelten; d.h.

$$h\big(f^M(m_1,\dots m_{\mathrm{ar}\,f})\big) = f^N\big(h(m_1),\dots,h(m_{\mathrm{ar}\,f})\big)$$

für alle $m_1,\dots m_{\mathrm{ar}\,f} \in |M|$.

Diese Definition vereinigt die Begriffe von Gruppen- und Ring-Homomorphismen, aber auch viele weitere Begriffe von Homomorphismen. Hierbei ist zu beachten, dass der Begriff der Homomorphismen für eine Klasse von algebraischen Strukturen wesentlich von der Wahl der Signatur abhängt. BEISPIEL!

Syntax

Wir legen zunächst eine abzählbare Menge $X = \{\mathtt{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von Symbolen fest, die wir *Variable* nennen.

Sei $\sigma = (F, \mathrm{ar})$ eine funktionale Signatur. Das zugehörige Alphabet ist die disjunkte Vereinigung $A_\sigma = \sigma \cup X \cup \{=\}$. Bevor wir die Sätze der zugehörigen Sprache L_σ definieren, definieren wir die *Terme* der Sprache:

- Jede Variable ist ein Term.
- Falls $f \in F$ ein n-stelliges Funktionssymbol ist (d.h. $\mathrm{ar}(f) = n$), und falls $t_1,\dots t_n$ Terme sind, dann ist auch $ft_1\dot{t}_n$ ein Term.

Wir definieren die Menge der σ-Terme als die kleinste Teilmenge von A_σ^*, die unter diesen Regeln abgeschlossen ist. Eine σ-Gleichung ist eine Zeichenkette der Form $t_1\mathtt{=}t_2$, und L_σ ist die Menge der σ-Gleichungen. In dieser Sprache können wir nun (in den jeweiligen Signaturen) die Axiome für Gruppen, abelsche Gruppen, Ringe usw. ausdrücken.

Satz von der eindeutigen Lesbarkeit.

Modellbeziehung

Eine Belegung s in M ist eine Abbildung, die jeder Variablen ein Element von M zuordnet. Sie lässt sich eindeutig fortsetzen zu einer Abbildung, die jedem Term ein Element von M zuordnet: ...

Wir legen fest: $M \models \mathtt{=}t_1t_2$ genau dann, wenn für jede Belegung s gilt: $s(t_1) = s(t_2)$.

Auch in der universellen Algebra lässt sich der semantische Folgerungsbegriff auf einen syntaktischen zurückführen:

- $\emptyset \vdash \mathtt{=}tt$ für jeden Term t.
- Falls $\Phi \vdash \alpha$ und $\Phi \subseteq \Psi$, so auch $\Psi \vdash \alpha$.
- $\{\mathtt{=}pq\} \vdash \mathtt{=}qp$ für alle Terme p und q.
- $\{\mathtt{=}pq, \mathtt{=}qr\} \vdash \mathtt{=}pr$ für alle Terme p, q und r.

- $\{=pp', =q_1pq_2r\} \vdash =q_1p'q_2r$; hierbei sind q_1 und q_2 beliebige Zeichenketten, also nicht unbedingt Terme, aber q_1pq_2 ist ein Term.
- Falls p, q, r Terme sind und $n \in \mathbb{N}$, und falls p' und q' sich aus p und q ergeben, indem wir jedes Vorkommen von $\mathtt{x}_n$ in p bzw. p' durch r ersetzen, so gilt $\{=pq\} \vdash =p'q'$.

Die Relation $\vdash_\sigma \subseteq \mathcal{P}(L_\sigma) \times L_\sigma$ ist definiert als die kleinste Relation, die diese Regeln erfüllt. Offensichtlich erfüllt diese Relation den Korrektheitssatz, d.h. falls $\Phi \vdash \psi$, so ist auch jedes Modell von Φ ein Modell von ψ: $\Phi \models_\sigma \psi$. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung (der Vollständigkeitssatz); aber wir werden das nicht beweisen und auch nicht benötigen.

3.2 Varietäten

Einige algebraische Konstruktionen lassen sich im allgemeinen Kontext der universellen Algebra definieren. Im Folgenden fixieren wir eine funktionale Signatur σ und betrachten drei Konstruktionen, mit denen man aus vorhandenen σ-Algebren neue gewinnen kann.

Sei A eine σ-Algebra und $B \subseteq |A|$. Wir interessieren uns für den Sonderfall, dass B unter den Funktionen von A abgeschlossen ist. Das heißt für jedes n-stellige Funktionssymbol von σ und alle $b_1, \ldots, b_n \in B$ ist auch $f^A(b_1, \ldots, b_n) \in B$. In diesem Fall können wir die Funktionen f^A auf B einschränken. Die Menge B zusammen mit den eingeschränkten Funktionen f^B als Interpretationen der Funktionssymbole bildet eine neue σ-Algebra: eine *Subalgebra* von B.

In abelschen Gruppen, Ringen und Moduln kann man Quotienten bilden. Wenn beispielsweise B eine Untergruppe einer abelschen Gruppe A ist, ist A/B eine abelsche Gruppe, die aus Äquivalenzklassen von Elementen von A besteht. Die 0 von A/B ist hierbei B. Dass der Fall im Allgemeinen etwas komplizierter ist, sieht man schon bei den nichtabelschen Gruppen: Wenn A nicht abelsch ist, müssen wir zusätzlich fordern, dass die Untergruppe B normal ist. Im allgemeinsten Fall kann man das, was man herausdividiert, nicht durch eine Unteralgebra repräsentieren. Ein Beispiel dafür sind affine Räume, bei denen man nicht Unterräume des affinen Raums selbst sondern des zugehörigen Vektorraums herausdividieren muss. Ein offensichtliches verbindendes Element aller dieser Definitionen ist, dass wir einen surjektiven Homomorphismus $A \to A/B$ haben: Die Verallgemeinerung der Quotientengruppe etc. ist das *homomorphe Bild*. B heißt ein homomorphes Bild von A, falls es einen Epimorphismus $A \to B$ gibt.

Das *(direkte) Produkt* von σ-Algebren wird dagegen genau so gebildet, wie man es erwarten würde. Das direkte Produkt $A \times B$ hat als zugrunde liegende Menge das Produkt $|A| \times |B|$, und alle Funktionen sind elementweise definiert. Analog für das Produkt $\prod_{i \in I} A_i$ einer beliebigen Familie von σ-Algebren.

Eine *Varietät* mit Signatur σ ist eine Klasse von σ-Strukturen, die unter Substrukturen, homomorphen Bildern und direkten Produkten abgeschlossen ist. Mit anderen Worten, eine Klasse K von σ-Strukturen ist eine Varietät, falls gilt:

- Angenommen, $A \in K$ und B ist eine Subalgebra von A. Dann ist auch $B \in K$.
- Angenommen, $A \in K$ und $A \to B$ ist ein Epimorphismus. Dann ist auch $B \in K$.
- Angenommen, $B = \prod_{i \in I} A_i$ und $A_i \in K$ für alle $i \in I$. Dann ist auch $B \in K$.

Satz (Tarski). Sei K eine Klasse von σ-Algebren und V die kleinste Varietät, die K enthält. Dann lässt sich jedes Element von V schreiben als das homomorphe Bild einer Subalgebra eines direkten Produkts von Elementen von K.

3.3 Satz von Birkhoff

Eine *Theorie* in einer gegebenen Signatur σ ist eine Menge von Sätzen dieser Signatur, im Falle der universellen Algebra also eine Menge von Gleichungen. Die Menge aller Modelle einer Theorie ist

$$\mathcal{M}(T) = \{M \in \mathcal{M}_\sigma \mid M \models T\}.$$

Die Theorie einer universellen σ-Algebra A ist

$$\mathrm{Th}(A) = \{\varphi \in L_\sigma \mid M \models \varphi\},$$

und die Theorie einer Klasse K von σ-Algebren ist

$$\mathrm{Th}(K) = \bigcap_{A \in K} \mathrm{Th}(A) = \{\varphi \in L_\sigma \mid M \models \varphi \text{ für alle } A \in K\}.$$

Satz (Birkhoff). Sei σ eine funktionale Signatur und $V \subseteq \mathcal{M}_\sigma$ eine Klasse von σ-Strukturen. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. $V = \mathcal{M}(\mathrm{Th}(V))$.
2. $V = \mathcal{M}(T)$ für eine Theorie T.
3. V ist eine Varietät.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Trivial. (2) $\implies$ (3): Es ist zu zeigen, dass V abgeschlossen unter homomorphen Bildern, Substrukturen und endlichen Produkten ist. Dazu überprüft man, dass wenn eine Gleichung in einer Algebra gilt, sie auch in jedem homomorphen Bild und jeder Substruktur gilt, und wenn sie in allen Faktoren eines direkten Produktes gilt, so auch im Produkt selbst.

(3) $\implies$ (1): $V \subseteq \mathcal{M}(\mathrm{Th}(V))$ ist klar. Nach (2) $\implies$ (3) ist die rechte Seite eine Varietät. Indem man das benutzt, kann man leicht $\mathrm{Th}(V) =$

$\mathrm{Th}(\mathcal{M}(\mathrm{Th}(V)))$ beweisen. Der letzte Schritt zum Beweis von $V \supseteq \mathcal{M}(\mathrm{Th}(V))$ ist komplizierter. Er involviert die Konstruktion von Termalgebren über einer Menge von Variablen (d.h. die Elemente der Algebra sind die Terme), die man dann durch die durch T gegebene Äquivalenzrelation dividiert, um ein Modell von T zu erhalten.

Kapitel 4

Prädikatenlogik der 1. Stufe

4.1 Definition der Logik der 1. Stufe

Signaturen

Wie in der universellen Algebra mit Relationen.

Semantik

Wie in der universellen Algebra mit Relationen.

Syntax

Wird später nachgetragen. Siehe vorerst Ebbinghaus, Flum, Thomas: Einführung in die mathematische Logik.

Modellbeziehung

Wird später nachgetragen. Siehe vorerst Ebbinghaus, Flum, Thomas: Einführung in die mathematische Logik.

4.2 Vollständigkeitssatz und Kompaktheitssatz

Für die Logik der 1. Stufe lässt sich eine rein syntaktische Ableitbarkeitsrelation $\vdash$ definieren, ähnlich wie für die Aussagenlogik. Für die Details siehe Ebbinghaus, Flum, Thomas: Einführung in die mathematische Logik (Kapitel: „Ein Sequenzenkalkül“).

Ein wesentlicher Unterschied ist hierbei, dass der Kalkül nicht nur auf den Sätzen definiert ist sondern auf allen Formeln.

Ähnlich wie wir das für die Aussagenlogik getan haben, beweist man nun:

Korrektheitssatz: Seien Φ eine Menge von σ-Formeln und ψ eine σ-Formel. Falls $\Phi \vdash \psi$, dann gilt für alle σ-Strukturen M und alle Belegungen $b\colon X \to |M|$ in M: Falls $(M, b) \models \Phi$, so auch $(M, b) \models \psi$.

In seiner Doktorarbeit in Wien bewies Kurt Gödel den zugehörigen Vollständigkeitssatz:

Gödelscher Vollständigkeitssatz: Seien Φ eine Menge von σ-Formeln und ψ eine σ-Formel. Angenommen, für alle σ-Strukturen M und alle Belegungen $b\colon X \to |M|$ in M gilt: Falls $(M, b) \models \Phi$, so auch $(M, b) \models \psi$. Dann gilt auch $\Phi \vdash \psi$.

Ebenfalls wie schon für die Aussagenlogik folgt aus dem Korrektheits- und dem Vollständigkeitssatz der Kompaktheitssatz:

Kompaktheitssatz: Sei σ eine Signatur und T eine σ-Theorie, d.h. eine Menge von σ-Sätzen. Falls jede endliche Teilmenge $T' \subseteq T$ erfüllbar ist in dem Sinne, dass es eine σ-Struktur M gibt mit $M \models T$, dann ist auch T selbst erfüllbar.

Da wir den Korrektheits- und Vollständigkeitssatz nicht bewiesen haben, beweisen wir den Kompaktheitssatz direkt. Die Beweisidee für moderne Beweise des Vollständigkeitssatzes ist übrigens ähnlich.

Beweis: Wir erweitern die Signatur σ um (evt. sehr viele) zusätzliche Konstantensymbole zu einer neuen Signatur σ', und die Theorie T zu einer σ'-Theorie $T' \supseteq T$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Jede endliche Teilmenge von T' ist erfüllbar.
- Für jeden σ'-Satz φ ist entweder $\varphi \in T'$ oder $\neg\varphi \in T'$.
- Für jeden Satz $\varphi \in T$ von der Form $\varphi = \exists \mathtt{x}\psi$ gibt es eine Konstante $\mathtt{c}$ in σ' so dass $\psi\frac{\mathtt{c}}{\mathtt{x}} \in T'$.

Es ist leicht zu sehen, dass T' bis auf Isomorphie ein Modell M „eingebaut“ hat: Wir definieren auf der Menge C der Konstanten von σ' die Äquivalenzrelation $\mathtt{c} \sim \mathtt{d} \iff \mathtt{=cd} \in T'$. Als zugrunde liegende Menge für M nehmen wir $|M| = C/\sim$. Die atomaren Sätze in T' (atomare Formeln, die zugleich Sätze sind) sagen uns, wie die Funktionen und Relationen in M zu definieren sind. Indem wir die drei speziellen Eigenschaften von T' benutzen, können wir durch Induktion über den Formelaufbau zeigen, dass für jede Interpretation $b\colon X \to |M| = C/\sim$ und jede σ'-Formel φ die folgende Beziehung gilt:

$$(M, b) \models \varphi \iff M \models \psi \iff \psi \in T',$$

wobei $\psi = \varphi\frac{b'(\mathtt{x}_0)}{\mathtt{x}_0}\frac{b'(\mathtt{x}_1)}{\mathtt{x}_1}\frac{b'(\mathtt{x}_2)}{\mathtt{x}_2}\cdots$ ist, mit $b'\colon X \to C$ so gewählt, dass $b(\mathtt{x}_n) = b'(\mathtt{x}_n)/\sim$.

Es bleibt zu zeigen, dass es eine solche Signatur $\sigma' \supseteq \sigma$ und σ'-Theorie T' gibt. Wir überprüfen zunächst, dass es eine σ-Theorie T gibt, die zumindest die ersten beiden Bedingungen erfüllt: Unter allen Erweiterungen von T, welche die erste Bedingung erfüllen, gibt es nach dem Zornschen Lemma (mindestens) eine maximale. Wir nennen sie T' und zeigen, dass sie auch die zweite Bedingung erfüllt. Nehmen wir im Widerspruch zur zweiten Bedingung an, es gäbe einen σ-Satz φ, für den weder $\varphi \in T'$ noch $\neg\varphi \in T'$ ist. Wegen Maximalität von T' gibt es dann eine endliche Teilmenge $U_1 \subseteq T'$, so dass $T_1 \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar ist, und ebenso eine endliche Teilmenge $U_1 \subseteq T'$, so dass $T_1 \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar ist. Dann folgt aber, dass die Theorie $U = U_1 \cup U_2$, ebenfalls eine endliche Teilmenge von T', überhaupt unerfüllbar ist. (Denn in einem Modell von U müsste ja entweder φ oder $\neg\varphi$ gelten.) Dies steht aber im Widerspruch zur ersten Bedingung.

Um T' zu erhalten, das alle drei Bedingungen erfüllt, gehen wir wie folgt vor: Ausgehend von $\sigma_0 = \sigma$ und $T_0 = T$ bilden wir eine σ_0-Theorie T_0' wie eben gezeigt, welche die ersten beiden Bedingungen erfüllt. Danach fügen wir für jeden σ_0-Satz der Form $\varphi = \exists \mathtt{x}_n \psi$ eine neue Konstante $\mathtt{c}_\varphi$ zu σ_0 hinzu. Die so entstandene Signatur nennen wir σ_1. Wir nehmen die σ_1-Theorie T_1, die aus T_0' zusammen mit den Sätzen $\psi\frac{\mathtt{c}}{\mathtt{x}}$ besteht. Wie man leicht sieht, ist jede endliche Teilmenge der resultierenden Theorie erfüllbar. Nun bilden wir $T_1' \supseteq T_1$ wie zuvor $T_0' \supseteq T_0$. Indem wir den Prozess wiederholen, erhalten wir eine Kette von Signaturen $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots$ und eine Kette von Theorien $T_0 \subseteq T_0' \subset T_1 \subset T_1' \subset T_2 \subset T_2' \subset \dots$. Schließlich bilden wir $\sigma' = \bigcup n \in \mathbb{N}\sigma_n$ und $T' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n'$. Da jede σ'-Formel φ bereits eine σ_n-Formel für ein $n \in \mathbb{N}$ ist und dann $\varphi \in T$ äquivalent zu $\varphi \in T_n'$ ist, überprüfen wir leicht, dass T' alle drei Eigenschaften erfüllt.

Korollar: Angenommen, T hat für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Modell mit mindestens n Elementen. Dann hat T ein unendliches Modell.

Beweis: Sei T' die Theorie T zusammen mit Sätzen, die aussagen: es gibt mindestens 1, mindestens 2, mindestens 3, ... Elemente. Weil jede endliche Teiltheorie von T' erfüllbarist, ist auch T' selbst erfüllbar. Ein Modell von T' ist aber ein unendliches Modell von T.

Korollar: Angenommen, die σ-Theorie T hat ein Modell der unendlichen Mächtigkeit κ. Dann hat T für jede Kardinalzahl $\kappa' > \kappa$ auch ein Modell mit einer Mächtigkeit mindestens κ'.

Beweis: Sei $M \models T$ ein Modell der Mächtigkeit κ. Wir fügen κ' viele neue Konstanten zu σ hinzu und betrachten in der erweiterten Signatur σ' die Theorie T' bestehend aus T zusammen mit den atomaren Sätzen, die sagen, dass die neuen Konstanten paarweise verschiedene Elemente repräsentieren. Es folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass die Theorie T' erfüllbar ist. Ein beliebiges Modell von T' lässt sich auch als Modell von T auffassen und hat sicher mindestens κ' viele Elemente.

(1) Rekursionstheorie: Ackermannfunktion 1.

Die (zweistellige) Ackermannfunktion $\alpha\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist definiert wie folgt:

$$\begin{aligned}\alpha(0,n) &= n+1\\ \alpha(m+1,0) &= \alpha(m,1)\\ \alpha(m+1,n+1) &= \alpha(m,\alpha(n+1,m))\end{aligned}$$

Die Ackermannfunktion ist maschinenberechenbar.

(2) Rekursionstheorie: Ackermannfunktion 2.

Für jede primitiv rekursive Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(x_1,\ldots,x_k) < \alpha(\max(x_1,\ldots,x_k),n)$ für alle $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{N}$ gilt. (Hinweis: Vermutlich brauchen Sie die Tatsache, dass α in beiden Argumenten monoton ist sowie die Ungleichung $\alpha(m,n+1) \geq \alpha(m+1,n)$.)

(3) Rekursionstheorie: Ackermannfunktion 3.

Beweisen Sie mit Hilfe der beiden vorherigen Ergebnisse: Es gibt eine einstellige Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die rekursiv ist, aber nicht primitiv rekursiv.