1. Vorlesung: Aussagenlogik

Definition 1 Ein *Alphabet* A ist eine Menge von *Zeichen*. Die Menge $A^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ ist die Menge der *Wörter (über A)*. Die Elemente von A^n haben *Länge* n. Es gibt genau ein Wort der Länge 0, nämlich das *leere Wort*. Statt $w = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in A^n$ schreiben wir auch $a_0 \cdots a_{n-1}$. Ist ausserdem $w' = a'_0 \cdots a'_{m-1}$ ein Wort der Länge m, so schreiben wir ww' für das Wort

$$a_0 \cdots a_{n-1} a'_0 \cdots a'_{m-1}$$

der Länge $n + m$. Für $n \geq 2$ und Worte $w_0, \ldots, w_n$, stehe $w_0 \cdots w_n$ für vw_n wobei $v = w_0 \cdots w_{n-1}$. Eine Wort w is *(echtes) Anfangssegment von* einem Wort w', wenn $w' = wv$ für ein (nicht leeres) Wort v.

Definition 2 Betrachte das Alphabet, das folgende Zeichen enthält:

$$(\ , \ ) \ , \ \neg \ , \ \wedge \ , \ X_0 \ , \ X_1 \ , \ X_2 \ \ldots$$

Var bezeichne die Menge der *(aussagenlogischen) Variablen* $X_0, X_1, \ldots$.

Die Menge der *(aussagenlogischen) Formeln* ist die kleinste Menge, so daß:

(F1) jede Variable ist eine Formel;

(F2) wenn φ eine Formel ist, so auch $\neg\varphi$;

(F3) wenn φ und ψ Formeln sind, so auch $(\varphi \wedge \psi)$.

Genauer gesagt, ist damit die kleinste Wortmenge F gemeint, die folgende Eigenschaften hat:

(a) $\mathrm{Var} \subseteq F$;

(b) wenn $\varphi \in F$, so $\neg\varphi \in F$;

(c) wenn $\varphi, \psi \in F$, so $(\varphi \wedge \psi) \in F$.

Bemerkung 3 Das ist wohldefiniert. Es gibt Wortmengen F, die die Eigenschaften (a)-(c) haben: z.B. ist die Menge aller Worte eine solche Menge. Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Wortmengen, die die Eigenschaften (a)-(c) haben. Dann ist auch $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ eine Wortmenge mit den Eigenschaften (a)-(c). Offensichtlich ist es die kleinste.

Lemma 4 (Eindeutige Lesbarkeit) *Für jede Formel φ tritt genau einer der folgenden Fälle ein:*

1. $\varphi = X$ *für ein* $X \in \mathrm{Var}$*;*
2. $\varphi = \neg\psi$ *für eine Formel* ψ*; dann heisst* φ Negation von ψ*;*
3. $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ *für Formeln* ψ, χ*; dann heisst* φ Konjunktion von ψ und χ*;*

In Fall 1 ist X eindeutig bestimmt, in Fall 2 ist ψ eindeutig bestimmt, und in Fall 3 sind ψ und χ eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei F die Menge der Formeln und $\varphi \in F$. Es tritt höchstens einer der Fälle ein: die jeweiligen ersten Zeichen sind verschieden. Es tritt mindestens einer der Fälle ein: sonst würde $F \setminus \{\varphi\}$ auch die Eigenschaften (a)-(c) haben, F wäre also nicht die kleinste solcher Mengen. Die Eindeutigkeit ist klar in den Fällen 1 und 2. Im Fall 3 folgt sie aus der Behauptung:

Keine Formel ist echtes Anfangsstück einer anderen Formel.

Angenommen es gibt Formeln, die ein echtes Anfangsstück haben, das auch eine Formel ist. Sei φ eine solche Formel kleinster Länge, und sei φ' eine Formel, die echtes Anfangsstück von φ ist. Dann ist φ keine Variable, also $\varphi = \neg\psi$ für eine Formel ψ oder $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ für Formeln ψ, χ.

Im ersten Fall beginnt φ' mit $\neg$, also $\varphi' = \neg\psi'$ für eine Formel ψ' und dann ist ψ' echtes Anfangsstück von ψ. Weil ψ kürzer ist als φ, steht das im Widerspruch zur Wahl von φ.

Im zweiten Fall beginnt φ' mit (, also gibt es Formeln ψ', χ', so daß $\varphi' = (\psi' \wedge \chi')$. Wenn $\psi \neq \psi'$, so ist entweder ψ' echtes Anfangsstück von ψ oder umgekehrt. In beiden Fällen bekommen wir einen Widerspruch wie oben. Also $\psi = \psi'$. Aber dann ist χ' echtes Anfangsstück von χ, erneut ein Widerspruch. $\square$

Definition 5 Eine Funktion $\beta : \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ heisst *(aussagenlogische) Belegung.*

Definition 6 Wir definieren eine Relation $\models$ durch folgende Festsetzungen. Nämlich, $\models$ ist *die* Relation zwischen Belegungen und Formeln, so daß für alle Belegungen β und alle Formeln ψ, χ und alle Variablen X gelte:

(a) $\beta \models X$ gdw. $\beta(X) = 1$;

(b) $\beta \models \neg\psi$ gdw. $\beta \not\models \psi$;

(c) $\beta \models (\psi \wedge \chi)$ gdw. $\beta \models \psi$ und $\beta \models \chi$.

Wir sagen, β *erfülle* φ, oder auch, φ sei *wahr unter* β, wenn $\beta \models \varphi$.

Übung 7 Zeigen Sie, daß es genau eine solche Relation $\models$ gibt.

Notation: für Formeln φ, ψ schreiben wir $(\varphi \vee \psi)$ für $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, und $(\varphi \to \psi)$ für $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$. Dann gilt offenbar für alle Belegungen β:

$$\begin{array}{rcl} \beta \models (\varphi \vee \psi) & \text{gdw.} & \beta \models \varphi \text{ oder } \beta \models \psi; \\ \beta \models (\varphi \to \psi) & \text{gdw.} & \text{wenn } \beta \models \varphi, \text{ so } \beta \models \psi. \end{array}$$

Sei $V \subseteq \mathrm{Var}$ und β eine Belegung. Dann ist

$$\beta \upharpoonright V := \{(X, \beta(X)) \mid X \in V\}$$

die Einschränkung von β auf V. Das ist eine Funktion von V nach $\{0, 1\}$. Solche Funktionen heissen *partielle Belegungen.*

Lemma 8 (Koinzidenzlemma) *Sei φ eine Formel und V eine Menge von Variablen, die alle in φ vorkommenden Variablen enthält. Für alle Belegungen β, γ mit $\beta \upharpoonright V = \gamma \upharpoonright V$ gilt:*

$$\beta \models \varphi \iff \gamma \models \varphi.$$

Beweis: Per Induktion über Formeln, das heißt, wir zeigen:

1. die Behauptung gilt für jede Variable;
2. wenn die Behauptung für ψ gilt, so auch für $\neg\psi$.
3. wenn die Behauptung für ψ und χ gilt, so auch für $(\psi \wedge \chi)$.

Das genügt: angenommen es gäbe Formeln, für die die Behauptung falsch ist. Wähle eine solche Formel φ mit kleinster Länge. Dann ist φ keine Variable wegen 1, keine Negation wegen 2 und keine Konjunktion wegen 3 – Widerspruch.

Der Beweis von 1 ist trivial. Für 2 nehmen wir an, daß die Behauptung für ψ gilt. Sei V eine Menge, die alle Variablen in $\neg\psi$ enthält und seien β, γ Belegungen mit $\beta \upharpoonright V = \gamma \upharpoonright V$. Dann

$$\begin{aligned} \beta \models \neg\psi &\iff \beta \not\models \psi \\ &\iff \gamma \not\models \psi \\ &\iff \gamma \models \neg\psi. \end{aligned}$$

Die zweite Äquivalenz folgt aus der Annahme an ψ: beachte, daß V alle Variablen aus ψ enthält. Der Beweis von 3 ist ähnlich. $\square$

Definition 9 Eine Formel φ heisst *allgemeingültig*, oder auch *tautologisch*, wenn für alle Belegungen β gilt, daß $\beta \models \varphi$. Eine Formel φ heisst *erfüllbar*, wenn es eine Belegung β gibt, so daß $\beta \models \varphi$. Für eine Menge Φ von Formeln, bedeute $\beta \models \Phi$, daß $\beta \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$. Eine Formelmenge Φ heisst *erfüllbar*, wenn es eine Belegung β gibt, so daß $\beta \models \Phi$. Eine Formel φ *folgt logisch aus* einer Formelmenge Φ, wenn für alle Belegungen β gilt:

$$\text{wenn } \beta \models \Phi, \text{ so } \beta \models \varphi;$$

wir schreiben dafür $\Phi \models \varphi$.

Satz 10 (Kompaktheitssatz) *Sei Φ eine Menge von Formeln, so daß jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Dann ist Φ erfüllbar.*

Beweis: Sei B die Menge der Belegungen. Wir verwenden ein Ergebnis der Topologie: die Mengen $\emptyset$ und

$$B_\alpha := \{\beta \in B \mid \alpha \subseteq \beta\},$$

wobei α eine endliche partielle Belegung ist, bilden die Basis einer kompakten Topologie auf B.

Ist V der Definitionsbereich von α, dann

$$\begin{aligned} B \setminus B_\alpha &= \{\beta \in B \mid \alpha \not\subseteq \beta\} \\ &= \bigcup_{X \in V} \{\beta \in B \mid \beta(X) \neq \alpha(X)\} \\ &= \bigcup_{X \in V} B_{\{(X, 1-\alpha(X))\}}, \end{aligned}$$

Die Mengen B_α sind also auch abgeschlossen.

Sei jetzt Φ eine Formelmenge gemäss Voraussetzung und $\Psi \subseteq \Phi$ endlich. Dann ist

$$B_\Psi := \{\beta \in B \mid \beta \models \Psi\}$$

nicht leer. Sei V die Menge der Variablen, die in (einer Formel in) Ψ vorkommen, und

$$A_\Psi := \{\beta \restriction V \mid \beta \in B_\Psi\}.$$

Dann gilt

$$B_\Psi = \bigcup_{\alpha \in A_\Psi} B_\alpha.$$

Beweis: ($\subseteq$) wenn $\beta \in B_\Psi$, so $\beta \in B_\alpha$ für $\alpha := \beta \restriction V \in A_\Psi$. ($\supseteq$) Sei $\gamma \in \bigcup_{\alpha \in A_\Psi} B_\alpha$. Wähle $\alpha \in A_\Psi$ so daß $\gamma \in B_\alpha$, das heißt $\gamma \restriction V = \alpha$. Da $\alpha \in A_\Psi$, gibt es $\beta \in B_\Psi$ mit $\beta \restriction V = \alpha$. Dann $\gamma \restriction V = \beta \restriction V$. Nach Koinzidenzlemma erfüllen γ und β dieselben Formeln mit Variablen in V, also $\gamma \in B_\Psi$.

Also ist B_Ψ abgeschlossen (A_Ψ ist endlich).

Wegen Kompaktheit gibt es $\beta \in \bigcap_\Psi B_\Psi$, wobei der Index Ψ alle endlichen Teilmengen von Φ durchläuft. Insbesondere $\beta \in B_{\{\varphi\}}$, d.h. $\beta \models \varphi$, für alle $\varphi \in \Phi$. Also $\beta \models \Phi$. $\square$

Beispiel 11 Seien $X, Y, Z \in \mathrm{Var}$. Betrachte die Formeln

$$\begin{aligned} \varphi_0 &:= (Y \to (X \vee Z)), \\ \varphi_1 &:= \neg X, \\ \varphi_2 &:= (Y \to Z). \end{aligned}$$

Dann gilt $\{\varphi_0, \varphi_1\} \models \varphi_2$: sei β eine Belegung mit $\beta \models \varphi_0$ und $\beta \models \varphi_1$. Wir müssen zeigen, daß $\beta \models \varphi_2$. Angenommen $\beta \not\models \varphi_2$. Da $\varphi_2 = \neg(Y \wedge \neg Z)$ also $\beta \models (Y \wedge \neg Z)$, also $\beta \models Y$ und $\beta \not\models Z$, also $\beta(Y) = 1$ und $\beta(Z) = 0$. Wegen $\beta \models \varphi_1$, gilt $\beta \not\models X$, also $\beta(X) = 0$. Aus $\beta(X) = \beta(Z) = 0$ folgt $\beta \not\models (X \vee Z)$, also $\beta \models \neg(X \vee Z)$. Da auch $\beta \models Y$, folgt $\beta \models (Y \wedge \neg(X \vee Z))$, das heißt, $\beta \not\models \neg(Y \wedge \neg(X \vee Z))$. Aber $\varphi_0 = \neg(Y \wedge \neg(X \vee Z))$, ein Widerspruch zur Annahme, daß $\beta \models \varphi_0$.

Ähnlich sieht man:

- jede Formel $\varphi_i, i \leq 2$, ist erfüllbar und nicht allgemeingültig.
- die Formel $((\varphi_0 \wedge \varphi_1) \to \varphi_2)$ ist allgemeingültig.