VALUATION AUGMENTÉE ET PAIRE MINIMALE

MICHEL VAQUIÉ

Résumé. Soit (K,ν) un corps valué, les notions de *valuation augmentée*, de *valuation augmentée limite* et de *famille admise* de valuations permettent de donner une description de toute valuation μ de $K[x]$ prolongeant ν. Dans le cas où le corps K est algébriquement clos cette description est particulièrement simple et nous pouvons la réduire aux notions de *paire minimale* et de *famille pseudo-convergente*.

Soient (K,ν) un corps valué hensélien et $\bar{\nu}$ l'unique extension de ν à la clôture algébrique $\bar{K}$ de K et soit μ une valuation de $K[x]$ prolongeant ν, nous étudions les extensions $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$ et nous donnons une description des valuations $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$ qui sont les extensions des valuations μ_i appartenant à la famille admise associée à μ.

Abstract. Let (K,ν) be a valued field, the notions of *augmented valuation*, of *limit augmented valuation* and of *admissible family* of valuations enable to give a description of any valuation μ of $K[x]$ extending ν. In the case where the field K is algebraically closed, this description is particularly simple and we can reduce it to the notions of *minimal pair* and *pseudo-convergent family.*

Let (K,ν) be a henselian valued field and $\bar{\nu}$ the unique extension of ν to the algebraic closure $\bar{K}$ of K and let μ be a valuation of $K[x]$ extending ν, we study the extensions $\bar{\mu}$ from μ to $\bar{K}[x]$ and we give a description of the valuations $\bar{\mu}_i$ of $\bar{K}[x]$ which are the extensions of the valuations μ_i belonging to the admissible family associated with μ.

Table des matières

Date: Mai 2020.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 13A18 (12J10 14E15).
Key words and phrases. valuation, extension, famille admise, paire minimale.
$*$ Partially supported by the grant of the Agence Nationale de la Recherche "CatAG" ANR-17-CE40-0014.

Introduction

Soit K un corps muni d'une valuation ν, nous pouvons obtenir toute valuation ou pseudo-valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ qui prolonge ν grâce à *une famille admise de valuations* $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$, où l'ensemble I est un ensemble totalement ordonné (cf. théorèmes 2.4 et 2.5 de [Va 1]). De plus chaque valuation μ_i de la famille est obtenue comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite associée à un polynôme-clé ou un polynôme-clé limite ϕ_i.

La famille $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ converge vers la valuation μ dans le sens où pour tout polynôme f de $K[x]$ la famille de valeurs $\big(\mu_i(f)\big)_{i\in I}$ est croissante et vérifie $\mu(f) = Sup\big(\mu_i(f)\ ;\ i \in I\big)$. En particulier si la famille I a un plus grand élément $\bar\imath$ la valuation μ est égale à la valuation $\mu_{\bar\imath}$ et il existe un polynôme $\phi = \phi_{\bar\imath}$ qui définit la valuation μ comme valuation augmentée ou valuation augmentée limite. Nous disons dans ce cas que la valuation est *bien spécifiée* et que le polynôme ϕ *définit* la valuation. Par définition ce polynôme apparaît dans la construction de la famille admise $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ associée à la valuation μ.

Comme tout polynôme-clé ou polynôme-clé limite est un polynôme irréductible de $K[x]$ dans le cas où le corps K est algébriquement clos les seuls polynômes-clés sont de degré un et les familles admises sont particulièrement simples : si la valuation μ est bien spécifiée elle est définie par un polynôme-clé ϕ de la forme $\phi(x) = x - a$, sinon elle est définie par une famille infinie de polynômes (ϕ_α) de la forme $\phi_\alpha(x) = x - a_\alpha$. Plus précisément, comme K est algébriquement clos la valuation μ est entièrement déterminée par les valeurs prises pour les polynômes f de la forme $f(x) = (x - b)$, et nous avons dans le cas où μ est bien spécifiée $\mu(x-b) \ = \ Inf\,(\nu(a-b), \delta)$ et la valuation μ est associée à une *paire minimale*, et dans le cas d'une famille infinie la valuation μ est la valuation associée à la *famille pseudo-convergente* (a_α) (**Proposition 2.10**). Il est aussi possible de décrire une valuation μ de $K[x]$ par une boule fermée ou par une famille décroissante de boules fermées dans K pour la distance ultramétrique associée à la valuation ν de K (**Proposition 2.11**).

Soient (K, ν) un corps valué quelconque et μ une valuation de $K[x]$ prolongeant ν, alors si $\bar\nu$ est une extension de ν à la clôture algébrique $\bar K$ de K il existe une extension $\bar\mu$ de μ à $\bar K[x]$ qui prolonge $\bar\nu$. Soit $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ la famille admise associée à μ, nous voulons décrire les valuations $\bar\mu_i$ de $\bar K[x]$ obtenues comme prolongement des valuations μ_i appartenant à la famille $\mathcal{A}$, et les familles de boules fermées de $\bar K$ associées aux valuations $\bar\mu_i$.

Dans le cas où (K, ν) est un corps valué hensélien nous associons à la famille admise associée à la valuation μ une famille décroissante $\big(\mathcal{B}_i\big)_{i\in I}$ de réunions finies de boules fermées de $\bar K$. Plus précisément chaque $\mathcal{B}_i$ est la réunion des boules disjointes $B_i^{(r)}$, le groupe de Galois agit transitivement sur l'ensemble fini $\{B_i^{(r)}\}$, et pour tout $i < j$ dans I chaque boule $B_i^{(r)}$ de $\mathcal{B}_i$ contient s boules $B_j^{(l)}$ appartenant à $\mathcal{B}_j$, où s est un entier indépendant de la boule $B_i^{(r)}$ choisie, et toute boule $B_j^{(l)}$ de $\mathcal{B}_j$ est contenue dans une boule $B_i^{(r)}$ de $\mathcal{B}_i$ (**Proposition 3.18**).

L'intersection des $\mathcal{B}_i$ est un sous-ensemble $\mathbf{B}(\mu)$ de $\bar K$, appelé *ensemble caractéristique de la valuation* μ, cet ensemble est vide dans le cas où la valuation μ n'est pas bien spécifiée, sinon c'est la réunion d'un ensemble fini de boules fermées non vides de $\bar{K}$, qui correspondent aux différentes extensions de μ à $\bar{K}[x]$ (**Théorème 3.19**).

Dans la quatrième partie nous montrons comment à partir d'une valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ nous pouvons construire la famille admise $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$ associée à la restriction μ de $\bar{\mu}$ à $K[x]$. Plus précisément nous construisons une famille décroissante de boules fermées B_i de $\bar{K}$, telle que la valuation μ_i de la famille admise $\mathcal{A}$ soit la retriction à $K[x]$ de la valuation $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$ définie par la boule B_i.

Alors que la construction de la famille admise $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$ se fait de *manière croissante*, c'est-à-dire la valuation μ_i est construite à partir des valuations μ_j pour $j < i$, la construction des boules B_i, et par conséquent des valuations $\bar{\mu}_i$ se fait de *manière décroissante*, c'est-à-dire la boule B_i est construite à partir desboules B_j pour $j > i$ (**Théorème 4.6**).

Enfin dans l'annexe nous interprétons les résultats de Kaplansky sur les extensions immédiates et les suites pseudo-convergentes à partir des propriétés des familles admises continues que nous avons définies précédemment.

1. Rappels

Dans ce qui suit nous nous donnons une valuation ν sur un corps K et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ que nous considérons sont des prolongements de ν. Nous nous donnons aussi un groupe totalement ordonné $\tilde{\Gamma}$, contenant le groupe des ordres Γ_ν de la valuation ν, et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de $K[x]$ ont leur groupe des ordres Γ_μ qui est un sous-groupe ordonné de $\tilde{\Gamma}$.

Pour toute valuation μ de $K[x]$ nous pouvons définir la notion de *polynôme-clé* ϕ, et si ϕ est un polynôme-clé pour μ et si γ est un élément de $\tilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante :

pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = g_m\phi^m + \ldots + g_1\phi + g_0$, où les polynômes g_j, $0 \le j \le m$, sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ϕ, et nous avons :

$$\mu'(f) \;=\; Inf\,(\mu(g_j) + j\gamma\ ;\ 0 \le j \le m)\ .$$

Nous pouvons définir aussi pour tout polynôme unitaire ϕ de degré un, $\phi = x - b$, et pour toute valeur γ de $\tilde{\Gamma}$ une valuation μ de $K[x]$, que nous appelons encore *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu = [\nu\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante :

tout polynôme f de $K[x]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = a_d\phi^d + \ldots + a_1\phi + a_0$, avec $a_j \in K$, et nous posons

$$\mu(f) \;=\; Inf\,(\nu(a_j) + j\gamma\ ;\ 0 \le j \le d)\ .$$

Dans ce cas cette valuation μ est aussi notée $\omega_{(b,\gamma)}$ (cf. [A-P 1]).

Nous pouvons définir la notion de *famille de valuations augmentées itérées* comme une famille dénombrable $\left(\mu_i\right)_{i\in I}$ de valuations de $K[x]$, $I = \{1, \ldots, n\}$ ou $I = \mathbb{N}^*$, associée à une famille de polynômes $\left(\phi_i\right)_{i\in I}$ et à une famille $\left(\gamma_i\right)_{i\in I}$ d'éléments de $\tilde{\Gamma}$, telle que chaque valuation μ_i, $i > 1$, est une valuation augmentée de la forme $\mu_i = [\mu_{i-1}\ ;\ \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$ et où la famille des polynômes-clés $\big(\phi_i\big)$ vérifie les deux propriétés suivantes : pour tout $i > 2$ nous avons $\deg\phi_i \geq \deg\phi_{i-1}$ et les polynômes ϕ_i et ϕ_{i-1} ne sont pas μ_{i-1}-équivalents. Nous renvoyons aux articles [McL 1], [McL 2], et [Va 1], pour les définitions et les propriétés des polynômes-clés, des valuations augmentées et des familles de valuations augmentées itérées.

Nous définissons aussi la notion de *famille admissible continue* comme une famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de valuations de $K[x]$, indexée par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, associée à la famille de polynômes-clés $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ et à la famille de valeurs $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$. Par définition chaque valuation μ_α est une valuation augmentée de la forme $\mu_\alpha = [\mu\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, où μ est une valuation de $K[x]$ donnée, les polynômes-clés ϕ_α sont tous de même degré d et les valeurs γ_α forment une famille croissante sans plus grand élément dans $\tilde{\Gamma}$.

Nous définissons l'ensemble

$$\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big) = \tilde{\Phi}\left(\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\right) \ = \ \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall \alpha < \beta \in A\}\ ,$$

nous supposons que cet ensemble est non vide, nous appelons $d_{\mathcal{C}}$ le degré minimal des polynômes appartenant à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$ et nous supposons aussi que nous avons l'inégalité $d < d_{\mathcal{C}}$, alors nous définissons l'ensemble

$$\Phi\big(\mathcal{C}\big) = \Phi\left(\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\right) \ = \ \{\phi \in \tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big),\ \deg\phi = d_{\mathcal{C}} \text{ et } \phi \text{ unitaire }\}\ .$$

Un polynôme ϕ appartenant à $\Phi\big(\mathcal{C}\big)$ est appelé un *polynôme-clé-limite* pour la famille $\mathcal{C}$, et pour ϕ un polynôme-clé limite et γ un élément de $\tilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, , nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée limite* pour $\mathcal{C}$ associée au polynôme-clé limite ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma\big]$, de la manière suivante :

pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = g_m\phi^m + \ldots + g_1\phi + g_0$, où les polynômes g_j, $0 \leq j \leq m$, sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé limite ϕ, et nous posons :

$$\mu'(f) \ = \ Inf\,(\mu_A(g_j) + j\gamma\ ;\ 0 \leq j \leq m)\ ,$$

où nous posons $\mu_A(g) = Sup(\mu_\alpha(g); \alpha \in A)$ pour tout g n'appartenant pas à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$. Nous renvoyons à [Va 1] pour les définitions précises et les propriétés des polynômes-clés limites et des valuations augmentées limites.

Remarque 1.1. *Si nous prenons la valeur $\gamma = +\infty$, la valuation augmentée $\mu = [\nu\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$ associée à un polynôme-clé ϕ ou la valuation augmentée limite $\mu' = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma\big]$ associée à un polynôme-clé limite ϕ est une pseudo-valuation de l'anneau $K[x]$ dont le noyau est l'idéal engendré par le polynôme ϕ.*

Définition. *Une* famille admissible simple $\mathcal{S}$ *pour la valuation ν de K est une famille de valuations $\big(\mu_i\big)_{i\in I}$ de $K[x]$ constituée d'une* partie discrète $\mathcal{D}$ *et d'une* partie continue $\mathcal{C}$,

- la partie discrète $\mathcal{D} = \big(\mu_l\big)_{l\in L}$ est une famille non vide de valuations augmentées itérées de $K[x]$ telle que la famille de polynômes-clés $\big(\phi_l\big)_{l\in L}$ associée vérifie l'inégalité stricte $deg\phi_l > deg\phi_{l-1}$.

- la partie continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est une famille admissible continue éventuellement vide ; si elle est non vide la famille* $\mathcal{D}$ *est finie, le degré* d *des polynômes-clé* ϕ_α *est égal au degré du dernier polynôme-clé* ϕ_n *de la famille* $\left(\phi_l\right)_{l\in L}$ *associée à* $\mathcal{D}$*, et pour tout* α *dans* A*, la valuation* μ_α *est la valuation augmentée* $\mu_\alpha = [\mu_n\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$*.*

Si la partie discrète $\mathcal{D}$ d'une famille admise simple $\mathcal{S}$ est constituée d'une seule valuation μ_1, et si la partie continue $\mathcal{C}$ est non vide, nous pouvons toujours considérer que la valuation μ_1 appartient à la famille $\mathcal{C}$, nous écrivons $\mathcal{S} = \mathcal{C}$ et nous disons alors que la famille simple $\mathcal{S}$ est continue.

Définition. *Une* famille admissible $\mathcal{A}$ *pour la valuation* ν *de* K *est une famille de valuations* $\left(\mu_i\right)_{i\in I}$ *de* $K[x]$*, obtenue comme réunion de* familles admissibles simples

$$\mathcal{A} \ = \ \bigcup_{j\in J} \mathcal{S}^{(j)} \ \ = \ \bigcup_{j\in J} \left(\mathcal{D}^{(j)};\mathcal{C}^{(j)}\right) \ \ ,$$

où J *est un ensemble dénombrable,* $J = \{1,\dots,N\}$ *ou* $J = \mathbb{N}^*$*, et nous définissons* J^* *par* $J^* = \{1,\dots,N-1\}$ *si* J *est fini et par* $J^* = J = \mathbb{N}^*$ *sinon, vérifiant :*

- pour j *appartenant à* J^**, la partie discrète* $\mathcal{D}^{(j)} = \left(\mu_l^{(j)}\right)_{l\in L^{(j)}}$ *est finie, la partie continue* $\mathcal{C}^{(j)} = (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}$ *est non vide et la première valuation* $\mu_1^{(j+1)}$ *de la famille simple* $\mathcal{S}^{(j+1)}$ *est une valuation augmentée limite pour la famille admissible continue* $\mathcal{C}^{(j)}$ *;*

- la première valuation $\mu_1^{(1)}$ *de la famille est la valuation associée à un polynôme unitaire de degré un,* $\phi_1^{(1)} = x - a$*, et à une valeur* $\gamma_1^{(1)}$*,* $\mu_1^{(1)} = [\nu\ ;\ \mu_1^{(1)}(\phi_1^{(1)}) = \gamma_1^{(1)}] = \omega_{(a,\gamma_1^{(1)})}$*.*

Dans la suite, comme la valuation ν *de* K *est fixée nous dirons simplement que* $\mathcal{A}$ *est une famille admissible de valuations de* $K[x]$*.*

Nous pouvons aussi écrire la famille admissible $\mathcal{A}$ comme une famille indexée par un ensemble totalement ordonné I,

$$\mathcal{A} \ = \ (\mu_i)_{i\in I} \ ,$$

et l'ensemble I peut être décrit de la manière suivante : pour tout j dans J, nous munissons l'ensemble $B^{(j)} = L^{(j)} \sqcup A^{(j)}$ de l'ordre total induit par les ordres sur $L^{(j)}$ et sur $A^{(j)}$ et défini par $l < \alpha$ pour tout $l \in L^{(j)}$ et tout $\alpha \in A^{(j)}$; et nous posons

$$I \ = \ \left\{(j,b) \mid j \in J \text{ et } b \in B^{(j)}\right\} \ ,$$

muni de l'ordre lexicographique. L'ordre sur l'ensemble I peut être caractérisé par la relation suivante : $i < k$ dans I si et seulement si pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons $\mu_i(f) \le \mu_k(f)$ et il existe au moins un polynôme g avec $\mu_i(g) < \mu_k(g)$.

La première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A}$ est obtenue à partir de la valuation ν de K grâce à un polynôme ϕ_1 unitaire de degré un et à une valeur γ_1. Nous considèrerons parfois que la valuation $\nu = \mu_0$ appartient à la famille $\mathcal{A}$ et par abus de notation nous considèrerons que 0 est le plus petit élément de l'ensemble I. La valuation μ_1 est ainsi considérée comme une valuation augmentée, définie par le polynôme ϕ_1.

A toute famille admissible $\mathcal{A}$ nous associons la famille des polynômes-clés ou polynômes-clés limites $\big(\phi_i\big)_{i\in I}$, que nous appelons pour simplifier la famille des polynômes-clés, et la famille des valeurs $\big(\gamma_i\big)_{i\in I}$.

Définition. *Une famille admissible $\mathcal{A}=(\mu_i)_{i\in I}$ est une famille* admise *si pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i\in I}$ admet un plus grand élément dans le groupe Γ.*

Définition. *Une famille admissible $\mathcal{A}=\big(\mu_i\big)_{i\in I}$ de valuations de $K[x]$ est dite* complète *si l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{\imath}$, sinon la famille admissible $\mathcal{A}$ est dite* ouverte.

Remarque 1.2. *Une famille admissible $\mathcal{A}$ est complète uniquement dans le cas où $\mathcal{A}$ est réunion d'un nombre fini de familles simples et où la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est discrète finie, $\mathcal{S}^{(N)}=\big(\mu_1^{(N)},\ldots,\mu_{n_N}^{(N)}\big)$.*

Dans ce cas la famille $\mathcal{A}$ est admise et la dernière valuation $\mu_{\bar{\imath}}=\mu_{n_N}^{(N)}$ de la famille peut être une pseudo-valuation de $K[x]$.

Remarque 1.3. *Si la famille admissible $\mathcal{A}=(\mu_i)_{i\in I}$ est ouverte, elle est admise si pour tout polynôme f il existe $i\in I$ tel que $\mu_i(f)=\mu_j(f)$ pour tout $j\geq i$. C'est le cas si la famille $\mathcal{A}$ est réunion infinie de familles admissibles simples, ou si la famille $\mathcal{A}$ est réunion de N familles admissibles simples $\mathcal{A}=\mathcal{S}^{(1)}\cup\ldots\cup\mathcal{S}^{(N)}$, telle que la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est une famille discrète infinie, c'est-à-dire $\mathcal{S}^{(N)}=\big(\mu_l^{(N)}\big)_{l\in L^{(N)}}$ avec $L^{(N)}$ infini, ou enfin si la famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est de la forme $\mathcal{S}^{(N)}=\big((\mu_l^{(N)})_{l\in L^{(N)}};(\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha\in A^{(N)}}\big)$, avec $\tilde{\Phi}\big((\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha\in A^{(N)}}\big)=\emptyset$, c'est-à-dire telle que pour tout f dans $K[x]$ il existe $\alpha<\beta$ dans $A^{(N)}$ avec $\mu_\alpha^{(N)}(f)=\mu_\beta^{(N)}(f)$.*

Définition. *La famille admise $\mathcal{A}=(\mu_i)_{i\in I}$* converge *vers la valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ définie pour tout polynôme f par*

$$\mu(f) \ = \ Sup\big(\mu_i(f)\ ;\ i\in I\big)\ .$$

Si l'ensemble I admet un plus grand élément $\bar{\imath}$, la limite de la famille est la valuation ou pseudo-valuation $\mu_{\bar{\imath}}$, sinon la limite est une valuation définie par $\mu(f)=\mu_i(f)$ pour i assez grand dans I.

Nous avons une réciproque au résultat précédent.

Théorème 1.4. *(Théorèmes 2.4. et 2.5. de* [Va 1]*) Soit μ une valuation ou pseudo-valuation de $K[x]$ prolongeant une valuation ν de K, alors il existe une famille admise de valuations de $K[x]$, notée $\mathcal{A}(\mu)$ et appelée* famille admise associée à la valuation μ *qui converge vers μ.*

Remarque 1.5. *La famille admise associée à une valuation μ n'est pas unique, mais est déterminée à équivalence près, où deux familles admissibles $\mathcal{A}=\bigcup_{j\in J}\mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{A}'=\bigcup_{j\in J'}\mathcal{S}'^{(j)}$ sont dites équivalentes si $J=J'$, si les familles discrètes $\mathcal{D}^{(j)}=\big(\mu_i^{(j)}\big)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{D}'^{(j)}=\big({\mu'}_i^{(j)}\big)_{1\leq i\leq n'}$ coïncident jusqu'à l'avant-dernière valuation, c'est-à-dire quand $n=n'$ et $\mu_i^{(j)}={\mu'}_i^{(j)}$ pour tout i, $1\leq i\leq n-1$, et si les sous-familles continues $\mathcal{C}^{(j)}$ et $\mathcal{C}'^{(j)}$ coïncident asymptotiquement. (cf. Proposition 2.9. de* [Va 2]*)*

Définition. *Une valuation μ de $K[x]$ est dite* bien spécifiée *si la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée est complète. Dans ce cas la valuation μ est la dernière valuation $\mu_{\bar{\iota}}$ de la famille $\mathcal{A}(\mu) = (\mu_i)_{i\in I}$.*

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 1.6. *(Proposition 1.4 de* [Va 3]*) Les propositions suivantes sont équivalentes :*
1) La valuation μ est bien spécifiée.
2) La valuation μ n'est pas maximale pour la relation d'ordre $\leq$.
3) La valuation μ admet un polynôme-clé.
4) La valuation μ peut être obtenue comme valuation augmentée

$$\mu = [\mu_0 \ ; \ \mu(\phi) = \gamma],$$

ou comme valuation augmentée limite

$$\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\right].$$

Si μ est une valuation bien spécifiée, nous disons que le polynôme $\phi_{\bar{\iota}}$ apparaissant comme dernier polynôme de la famille $\left(\phi_i\right)_{i\in I}$ *définit* la valuation ou pseudo-valuation μ. Si μ est obtenue comme valuation augmenté $\mu = [\mu_0 \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, ou comme valuation augmentée limite, $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\right]$, nous pouvons en particulier choisir $\phi_{\bar{\iota}} = \phi$.

Soit μ une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$, alors toute valuation μ_i d'une famille admissible associée à μ est une valuation bien spécifiée, définie par le polynôme ϕ_i.

Pour toute valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$, les valuations μ_i appartenant à une famille admise associée à μ sont définies de manière essentiellement unique (cf. remarque 1.5), en particulier quand μ est bien spécifiée, si μ est une valuation augmentée, $\mu = [\mu_0 \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, la valuation μ_0 est définie de manière unique, et si μ est une valuation augmentée limite, $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\right]$, la famille $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est bien définie *asymptotiquement.*

Dans la suite nous noterons alors

$$\mu = [\mu_\sharp \ ; \ \mu(\phi) = \gamma],$$

où $\mu_\sharp$ est la valuation μ_0, resp. une famille continue de valuations $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$, et où ϕ est un polynôme-clé, resp. un polynôme-clé limite, pour $\mu_\sharp$. En général le polynôme ϕ n'est pas défini de manière unique, en fait les polynômes ϕ et ψ définissent la même valuation μ si et seulement si ce sont des polynômes unitaires de même degré vérifiant $\mu_\sharp(\phi - \psi) \geq \gamma$, où nous posons $\mu_\sharp(f) = \mu_A(f) = Sup(\mu_\alpha(f); \alpha \in A)$ dans le cas où $\mu_\sharp$ est la famille $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ ([Va 2]).

Remarque 1.7. *Comme un polynôme-clé est irréductible, dans le cas où le corps $\bar{K}$ est algébri quement clos, une valuation bien spécifiée μ est de la forme*

$$\mu = [\nu \ ; \ \mu(\phi) = \delta],$$

avec $\phi(x) = x - a$. Cela correspond à la valuation associée à la paire minimale (a, δ) notée $\omega_{(a,\delta)}$ définie dans [A-P 1].

2. Groupe des valeurs et algèbre graduée

Soit μ une valuation sur un corps K de groupe des valeurs Γ_μ, pour tout sous-anneau A de K et pour tout γ dans $\bar\Gamma_\mu = \Gamma_\mu \cup \{+\infty\}$, nous définissons les groupes $\mathcal{P}_\gamma(A) = \{x \in A \mid \mu(x) \geq \gamma\}$ et $\mathcal{P}^+_\gamma(A) = \{x \in A \mid \mu(f) > \gamma\}$, et l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu A$ associée à la valuation μ par :

$$\mathrm{gr}_\mu A \ = \ \bigoplus_{\gamma\in\bar\Gamma} \mathcal{P}_\gamma(A)/\mathcal{P}^+_\gamma(A) \ .$$

Nous notons H_μ l'application de A dans $\mathrm{gr}_\mu A$ qui à tout élément x de A avec $\mu(x) = \gamma$ associe l'image de x dans $\mathcal{P}_\gamma(A)/\mathcal{P}^+_\gamma(A)$, et nous notons $\Delta_\mu(A)$ la partie homogène de degré 0, $\Delta_\mu(A) = \mathcal{P}_0(A)/\mathcal{P}^+_0(A)$.

En particulier pour $A = K$ les groupes $\mathcal{P}_0(K)$ et $\mathcal{P}^+_0(K)$ sont respectivement l'anneau V_μ de la valuation et son idéal maximal, $\Delta_\mu(K)$ est égal à son corps résiduel κ_μ et l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K$ est *simple*, i.e. tout élément homogène non nul admet un inverse. Plus généralement si K est le corps des fractions de A, l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K$ est l'algèbre graduée simple engendrée par $\mathrm{gr}_\mu A$ et le corps résiduel κ_μ est le corps des fractions de l'anneau $\Delta_\mu(A)$.

Soit $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ une famille admissible de valuations, et pour tout $i \in I$ nous appelons Γ_{μ_i} le groupe des ordres de la valuation μ_i.

Si μ_k et μ_l sont deux valuations appartenant à la même sous-famille simple $\mathcal{S}$ de la famille $\mathcal{A}$ telles que μ_l est obtenue comme valuation augmentée $\mu_l = [\mu_k \ ; \ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, nous disons que (μ_k, μ_l) forment *un couple de valuations successives* de la famille. Le groupe des ordres Γ_{μ_l} de la valuation μ_l est égal à $\Gamma_{\mu_l} = \Gamma_{\mu_k} \oplus \mathbb{Z}\gamma_l$, d'où l'égalité

$$[\Gamma_l : \Gamma_k] \ = \ \tau_l$$

où τ_l est le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_l$ appartienne à Γ_{μ_k} si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et où τ_l est $+\infty$ sinon. Remarquons que la valuation μ_l admet un polynôme-clé qui n'est pas μ_l-équivalent au polynôme ϕ_l si et seulement si la valeur γ_l appartient au groupe $\Gamma_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, en particulier si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ la valuation μ_l est la dernière valuation de la famille admissible $\mathcal{A}$.

Comme les valuations μ_k et μ_l vérifient $\mu_k(f) \leq \mu_l(f)$ pour tout f dans $K[x]$ nous avons une application naturelle $g\colon \mathrm{gr}_{\mu_k} K[x] \to \mathrm{gr}_{\mu_l} K[x]$, et celle-ci induit un isomorphisme

$$G\colon \big(\mathrm{gr}_{\mu_k} K[x]/(H_{\mu_k}(\phi_l))\big)[T] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu_l} K[x] \ ,$$

qui envoie T sur $G(T) = H_{\mu_l}(\phi_l)$ (cf. [Va 1]).

Rappelons qu'il existe q_k et q'_k dans $K[x]$ vérifiant $q_k q'_k$ μ_k-équivalent à 1 et $\mu_k(q_k) = -\mu_k(q'_k) = \mu_k(\phi_l)$, et nous posons $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_k\phi_l)$. De plus si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, il existe p_l et p'_l vérifiant $p_l p'_l$ μ_l-équivalent à 1 et $\mu_l(p_l) = -\mu_l(p'_l) = \tau_l\gamma_l$ (cf. [Va 3]). Alors le noyau de la composante de degré 0 de l'application g, $g_0\colon \Delta_{\mu_k} \to \Delta_{\mu_l}$, est l'idéal engendré par φ_l, et nous avons :

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\big(\Delta_{\mu_k}/(\varphi_l)\big) \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ \Delta_{\mu_l} \ ,$$

- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\big(\Delta_{\mu_k}/(\varphi_l)\big)[S_l] \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ \Delta_{\mu_l} \ ,$$

avec $S_l = H_{\mu_l}\big(p'_l {\phi_l}^{\tau_l}\big)$ (cf. [Va 1] Remarque 1.5).

Si μ_l est la valuation augmentée limite d'une famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, associée au polynôme clé-limite ϕ_l, $\mu_l = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l\big]$, nous définissons l'algèbre graduée $\mathbf{gr_A} = \mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x]/(H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta))$ qui ne dépend pas du couple $\alpha < \beta$ dans A, et l'application naturelle de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_l}K[x]$ induit un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$Q\colon \mathbf{gr_A}[T] \ \xrightarrow{\sim}\ \mathrm{gr}_{\mu_l}K[x]\ ,$$

qui envoie T sur $Q(T) = H_{\mu_l}(\phi_l)$. Nous appelons $\mathbf{\Delta_A}$ la composante de degré 0 de $\mathbf{gr_A}$, cet anneau est isomorphe à $\Delta_{\mu_\beta}/(\varphi_\alpha)$ où (μ_α, μ_β) est un couple de valuations successives de $\mathcal{A}$ appartenant à $\mathcal{C}$, avec $\varphi_\alpha = H_{\mu_\alpha}\big(q'_\alpha \phi_\beta\big)$.

Tous les groupes de valuation Γ_{μ_α} sont égaux et nous notons ce groupe $\mathbf{\Gamma_A}$. Pour tout γ dans $\mathbf{\Gamma_A}$ il existe p et $p' = p'(\gamma)$ dans $K[x]$ vérifiant $pp'(\gamma)\underset{\mu_\alpha}{\sim}1$ et $\mu_\alpha(p) = -\mu_\alpha(p'(\gamma)) = \gamma$, pour $\alpha \in A$.

De plus si γ_l appartient à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et si nous appelons comme précédemment τ_l le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_l$ appartienne à $\mathbf{\Gamma_A}$ il existe p et p' dans $K[x]$ tels que pp' soit μ_α-équivalent à 1 pour α suffisamment grand et tels que $\mu_\alpha(p') = -\tau_l\gamma_l$ (cf. [Va 3] Proposition 2.2).

Alors le morphisme Q induit un isomorphisme en degré 0 :
- si γ_l n'appartient pas à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0\colon \mathbf{\Delta_A} \ \xrightarrow{\sim}\ \Delta_{\mu_l}\ ,$$

- si γ_l appartient à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0\colon \mathbf{\Delta_A}[S] \ \xrightarrow{\sim}\ \Delta_{\mu_l}\ ,$$

qui envoie S sur $H_{\mu_l}(p'{\phi_l}^{\tau_l})$.

Remarque 2.1. *Soit μ_l une valuation de la famille $\mathcal{A}$, nous notons $\Gamma_\sharp$ le groupe des ordres Γ_{μ_k} de la valuation μ_k si μ_l est obtenue comme valuation augmentée, $\mu_l = [\mu_k\ ;\ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, ou le groupe des ordres $\mathbf{\Gamma_A}$ si la valuation μ_l est obtenue comme valuation augmentée limite, $\mu_l = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l\big]$.*

Si μ_l n'est pas la dernière valuation de la famille $\mathcal{A}$, il existe une valuation μ_m telle que (μ_l, μ_m) est un couple de valuations successives, et nous écrivons le polynôme-clé ϕ_m sous la forme $\phi_m = {\phi_l}^{r_l} + \ldots + g_0$, nous avons $r_l\gamma_l \in \Gamma_\sharp$, en particulier γ_l appartient à $\Gamma_\sharp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et nous pouvons définir l'entier s_l par $r_l = \tau_l s_l$.

Proposition 2.2. *Il existe une famille croissante de corps $\big(F_k\big)_{k\in I^*}$, avec F_0 égal au corps résiduel κ_ν de la valuation ν de K, telle que pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives de $\mathcal{A}$ nous avons :*
- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu_l} \ = \ F_k[S_l]\ , \quad \textit{avec } S_l = H_{\mu_l}\big(p'_l \phi_l^{\tau_l}\big)\ ;$$

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu_l} \ = \ F_k\ .$$

De plus si l appartient à I^*, F_l est un extension finie de F_k de degré s_l, et pour l tel que la valuation μ_l appartienne à une famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$, le corps F_l est isomorphe à $\mathbf{\Delta_A}$.

En particulier tous les corps F_l sont des extensions algébriques du corps résiduel κ_ν, et si la famille $\mathcal{A}$ est constituée d'un nombre fini de sous-familles simples, tous les corps F_l sont des extensions finies de κ_ν.

Preuve. La proposition est une généralisation du résultat de MacLane (cf. [McL 1] Theorem 12.1 et [Va 1] Théorème 1.12) et se démontre par récurrence (cf. [Va 3]) .

□

Remarque 2.3. *Nous avons montré de plus que si μ_k est la première valuation $\mu_1^{(j)}$ d'une sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, et si nous notons $F_0^{(j)}$ le corps tel que Δ_{μ_k} soit égal à $F_0^{(j)}[S]$, alors F_k est une extension algébrique finie de $F_0^{(j)}$ de degré s_k. En effet nous avons $S = H_{\mu_k}\big(p'_k {\phi_k}^{\tau_k}\big)$ et le corps F_k est égal à $\Delta_{\mu_k}/(\varphi_l)$ où $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_l \phi_l)$ avec $\phi_l = {\phi_k}^{\tau_k s_k} + \ldots + g_0$.*

Proposition 2.4. *(Proposition 2.3 de* [Va 3]*) Soit μ une valuation de l'anneau des polynômes $K[x]$, alors l'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est de la forme suivante :*

i) si la valuation μ n'est pas bien spécifiée

$$\mathrm{gr}_\mu K[x] \ = \ G^{(0)} \ ,$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple, c'est-à-dire telle que tout élément homogène non nul admette un inverse ;

ii) si la valuation μ est bien spécifiée

$$\mathrm{gr}_\mu K[x] \ = \ G^{(0)}[T] \ ,$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple et T est l'image $H_\mu(\phi)$ du polynôme ϕ définissant la valuation μ.

De plus un élément homogène ψ de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est irréductible si et seulement si il existe f polynôme-clé pour la valuation μ dans $K[x]$ et ε élément homogène inversible de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ tels que $\varepsilon\psi$ soit égal à l'image $H_\mu(f)$ de f dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$.

Proposition 2.5. *La valuation μ de $K[x]$ est bien spécifiée si et seulement si l'extension $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ de corps valués vérifie l'égalité d'Abhyankar :*

$$dim.alg._K K(x) = dim.alg._{\kappa_\nu} \kappa_\mu + rang.rat.\Gamma_\mu/\Gamma_\nu = 1.$$

Preuve. Rappelons que le corps résiduel κ_μ est égal au corps des fractions de la partie homogène de degré 0, Δ_μ de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$.

Dans le cas où la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée, $\mu = [\mu_\sharp \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est de la forme $G^{(0)}[T]$ où l'algèbre simple $G^{(0)}$ est isomorphe à l'algèbre quotient $\mathrm{gr}_{\mu_\sharp} K[x]/(H_{\mu_\sharp}(\phi))$ et où $T = H_\mu(\phi)$.

Si γ n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_\sharp} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène de degré 0, Δ_μ, est isomorphe à $\Delta_{\mu_\sharp}/(\varphi_\sharp)$, c'est-à-dire au corps $F_\sharp$, nous en déduisons que le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe à $F_\sharp$, par conséquent est une extension algébrique finie du corps résiduel κ_ν.

Si γ appartient à $\Gamma_{\mu_\sharp} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène de degré 0, Δ_μ, est isomorphe à $\Delta_{\mu_\sharp}/(\varphi_\sharp)[S]$, avec $S = H_\mu(p'\phi^\tau)$ où τ est égal à $[\Gamma_\mu : \Gamma_\nu]$, et le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe à $F_\sharp(S)$, par conséquent est une extension transcendante de degré 1 du corps résiduel κ_ν.

Dans le cas où la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée limite, $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big) \,;\, \mu(\phi) = \gamma\big]$, nous avons un résultat analogue.

Si γ n'appartient pas à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène Δ_μ est isomorphe à $\mathbf{\Delta_A}$, le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe au corps $\mathbf{\Delta_A}$ et est donc une extension algébrique finie du corps résiduel κ_ν.

Si γ appartient à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène Δ_μ est isomorphe à $\mathbf{\Delta_A}[S]$, avec $S = H_{\mu_\alpha}(p'\phi^\tau)$ où τ est égal à $[\Gamma_\mu : \mathbf{\Gamma_A}]$, et le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe à $\mathbf{\Delta_A}(S)$, par conséquent est une extension transcendante de degré 1 du corps résiduel κ_ν.

Si la valuation μ n'est pas bien spécifiée, chacune des valuations μ_l de la famille admise $\mathcal{A}$ associée à la valuation μ a un groupe des ordres Γ_{μ_l} qui est une extension finie du groupe Γ_ν, donc le groupe Γ_μ, réunion des groupes Γ_{μ_l} a même rang rationnel que le groupe Γ_ν.

Le corps résiduel κ_μ est la réunion des corps F_l, extensions finies de κ_ν, donc une extension algébrique du corps résiduel κ_ν. □

Nous pouvons déduire de ce qui précède le résultat suivant, qui répond à une question posée par Nagata (cf. [Na]) et a été résolue par J. Ohm ([Oh]). Rappelons que nous disons qu'une extension de corps l/k est *réglée* s'il existe $k \subset k_1 \subset l$ avec l/k_1 extension transcendante pure de degré 1 et k_1/k extension algébrique finie.

Corollaire 2.6. *(***The ruled residue conjecture***) Soit $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ une extension de corps valués, alors le corps résiduel κ_μ est une extension algébrique ou réglée du corps résiduel κ_ν.*

Le rang $rg(\mu)$ de la valuation μ est compris entre $rg(\nu)$ et $rg(\nu)+1$, la valuation μ a le même rang que la valuation ν si γ appartient au groupe $\Gamma_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, sinon la valeur γ appartient à un groupe totalement ordonné $\tilde{\Gamma}$ qui contient Γ_ν comme sous groupe isolé et γ vérifie $\gamma > \delta$ pour tout δ dans Γ_ν.

Dans ce ce dernier cas la valuation μ est essentiellement unique, c'est-à-dire que si nous nous donnons un polynôme ϕ qui est polynôme-clé pour une valuation $\mu_\sharp$ ou polynôme-clé limite pour une famille de valuation $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$, la valuation bien spécifiée μ définie par le polynôme ϕ et la valeur γ est indépendante à équivalence près de la valeur γ choisie dans $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma_\nu$.

De plus le polynôme ϕ qui définit une valuation μ de rang $rg(\mu) = rg(\nu) + 1$ est unique. En effet si deux polynômes ϕ et ψ définissent la même valuation μ comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite avec la valeur γ, nous avons l'inégalité $\mu(\psi - \phi) \geq \gamma$.

Remarque 2.7. *Si nous prenons $\gamma = +\infty$ nous trouvons une pseudo-valuation de $K[x]$ dont le noyau est égal à l'idéal engendré par ϕ. Il y a une bijection entre l'ensemble des valuations μ de $K[x]$ de rang $rg(\mu) = rg(\nu) + 1$ et l'ensemble des pseudo-valuations de $K[x]$ de noyau non trivial, et l'étude des valuations de rang $rg(\mu) = rg(\nu) + 1$ définies par le polynôme ϕ est équivalente à l'étude des pseudo-valuations de noyau (ϕ), c'est-à-dire à l'étude des valuations de l'extension $L = K[x]/(\phi)$ de K qui prolongent ν.*

Proposition 2.8. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par le polynôme ϕ, et soit $\mathrm{gr}_\mu K[x] = G^{(0)}[T]$ l'algèbre graduée associée avec $T = H_\mu(\phi)$, alors si ψ est un autre polynôme qui définit la valuation μ nous avons $S = H_\mu(\psi)$ qui est égal à T ou à $T - h$ avec $h \in G^{(0)}$ de valuation $\mu(h) = \mu(\phi) = \mu(\psi)$.*

Réciproquement tout générateur homogène S de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ sur l'algèbre simple $G^{(0)}$ est de la forme $S = T - h$ avec $h \in G^{(0)}$ de degré $\mu(h) = \mu(\phi) = \mu(\psi)$, et il existe un polynôme ψ dans $K[x]$ qui définit la valuation μ avec $H_\mu(\psi) = S$.

Preuve. Si la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée $\mu = [\mu' \,;\, \mu(\phi) = \gamma]$ c'est une conséquence du résultat suivant :

deux valuations augmentées μ_1 et μ_2 d'une même valuation μ définies respectivement par des polynômes-clés ϕ_1 et ϕ_2 et des valeurs γ_1 et γ_2 sont égales si et seulement si $\gamma_1 = \gamma_2$ et si les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 ont même degré et vérifient $\mu(\phi_1 - \phi_2) \geq \gamma_1$ (Proposition 1.2. de [Va 2]).

Si la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée limite $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A} \,;\, \mu(\phi) = \gamma\right]$ c'est une conséquence du résultat analogue :

deux valuations augmentées limites μ_1 et μ_2 d'une même famille admissible continue $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}$ définies respectivement par des polynômes-clés limites ϕ_1 et ϕ_2 et des valeurs γ_1 et γ_2 sont égales si et seulement si $\gamma_1 = \gamma_2$ et si les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 ont même degré et vérifient $\mu_A(\phi_1 - \phi_2) \geq \gamma_1$ (Proposition 1.4. de [Va 2]). □

Nous rappelons aussi le résultat suivant, qui est une conséquence de la proposition précédente, mais qui peut se démontrer aussi directement à partir des propositions 1.2 et 1.4 de [Va 2].

Proposition 2.9. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par le polynôme ϕ, et soit ψ un polynôme unitaire de $K[x]$ vérifiant* $\deg\, \psi = \deg\, \phi$ *et $\mu(\psi) = \mu(\phi)$, alors le polynôme ψ définit la valuation μ.*

□

Dans la suite de ce paragraphe nous allons supposer que le corps K est algébriquement clos, alors pour toute valuation ν de K le corps résiduel κ_ν est aussi algébriquement clos et le groupe des valeurs Γ_ν est divisible. De plus dans le cas où K est algébriquement clos, les éléments irréductibles de l'anneau $K[x]$ sont les polynômes de degré 1, nous en déduisons que toute valuation μ de $K[x]$ est définie entièrement par les valeurs $\mu(x - b)$, pour $b \in K$, et que tout polynôme f de degré plus grand que 2 ne peut pas être un polynôme-clé ou un polynôme-clé limite.

Nous rappelons que pour tout corps L, pour trouver la famille admise $\mathcal{A}$ associée à une valuation μ de $L[x]$ le premier pas est de considérer l'ensemble $\Lambda_\mu = \{\mu(x - b) \mid b \in L\}$. Si cet ensemble a un plus grand élément δ nous choisissons un polynôme $\phi = x - a$ pour lequel cette valeur est atteinte et la première valuation μ_1 de la famille est la valuation associée, c'est-à-dire la valuation $\mu_1 = \omega_{(a,\delta)}$. Alors soit la valuation μ_1 est la valuation μ cherchée, soit il existe un polynôme-clé ϕ pour la valuation μ_1 dans $L[x]$ de degré strictement supérieur à 1.

Si l'ensemble Λ_μ n'a pas de plus grand élément nous trouvons un sous-ensemble $\{\delta_\alpha ; \alpha \in A\}$ cofinal dans Λ_μ, indexé par un ensemble totalement ordonné A, sans plus grand élément, avec $\delta_\alpha < \delta_\beta$ pour $\alpha < \beta$, et pour tout $\alpha \in A$ nous choisissons un polynôme $\phi_\alpha = x - a_\alpha$ vérifiant $\mu(\phi_\alpha) = \delta_\alpha$. Alors la famille $\mathcal{C}$ de valuation définie par $\mathcal{C} = \left(\omega_{(a_\alpha, \delta_\alpha)}\right)_{\alpha \in A}$ est une famille continue de valuations de $L[x]$. Pour tout $\alpha < \beta$ dans A nous avons $\nu(a_\beta - a_\alpha) = \gamma_\alpha$, en particulier la famille $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ vérifie

$$\nu(a_\tau - a_\sigma) \ > \ \nu(a_\sigma - a_\rho)$$

pour tous $\tau > \sigma > \rho$ dans A, et nous retrouvons la définition d'Ostrowski de *famille pseudo-convergente* ([Os], [Ka]). De plus si cette famille admet un polynôme-clé limite celui-ci est de degré strictement supérieur à 1.

Nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 2.10. *Supposons que le corps K est algébriquement clos, alors une valuation μ de $K[x]$ est soit une valuation de la forme $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, soit une une valuation associée à une famille pseudo-convergente.*

Preuve. Comme il ne peut pas exister de polynôme-clé ou polynôme-clé limite de degré strictement plus grand que 1, soit l'ensemble $\Lambda_\mu = \{\mu(x-b) \mid b \in K\}$ a un plus grand élément δ, la valuation μ est bien spécifiée et est de la forme $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, soit l'ensemble Λ_μ n'a pas de plus grand élément, la valuation μ n'est pas bien spécifiée et elle est associée à la famille pseudo-convergente $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$.

□

En particulier si la valuation μ n'est pas bien spécifiée, le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est égal au corps résiduel κ_ν de la valuation ν et le groupe des ordres Γ_μ est égal au groupe des ordres Γ_ν, et nous en déduisons que l'extension de corps valués $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ est *immédiate* (cf. [Ka]). Nous étudions dans l'**Annexe A** le lien entre les résultats de Kaplansky sur les extensions immédiates et la présentation des extensions de valuations à partir des familles admissibles.

Dans le cas où le corps K est algébriquement clos, pour décrire toutes les valuations de $K[x]$ prolongeant la valuation ν de K, nous munissons K de la distance ultramétrique associée à ν. Pour tout $a \in K$ et tout $\delta \in \Gamma$ nous définissons les boules fermée B et ouverte B° de centre a et de rayon δ respectivement par

$$B = B(a,\delta) = \big\{c \in K \ / \ \nu(a-c) \geq \delta\big\} \ ,$$
$$B^\circ = B^\circ(a,\delta) = \big\{c \in K \ / \ \nu(a-c) > \delta\big\} \ .$$

Comme la distance définie par la valuation ν est ultramétrique tout élément appartenant à une boule ouverte ou fermée est son centre, plus précisément si $b \in B^\circ(a,\delta)$, resp. $b \in B(a,\delta)$, alors $B^\circ(a,\delta) = B^\circ(b,\delta)$, resp. $B(a,\delta) = B(b,\delta)$.

Proposition 2.11. *Toute boule fermée $B = B(a,\delta)$ définit une valuation bien spécifiée μ de $K[x]$ par $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, qui ne dépend pas du centre a, et toute valuation bien spécifiée μ est de cette forme.*

À toute valuation μ qui n'est pas bien spécifiée, on peut associer une famille décroissante $(B_\alpha = B(a_\alpha,\delta_\alpha))_{\alpha\in A}$ de boules fermées, où A est un ensemble totalement ordonné sans plus grand élément, dont l'intersection $\bigcap_\alpha B_\alpha$ est vide, telle que la valuation μ est définie par

$$\mu(x-c) \ = \ Sup\,(\nu(c-a_\alpha) \ ; \ \alpha \in A) \ .$$

Preuve. La première partie concernant les valuations bien spécifiées μ est une conséquence directe de ce qui précède.

Pour une valuation qui n'est pas bien spécifiée μ il reste à vérifier que l'intersection $\bigcap_\alpha B_\alpha$ est vide. En effet la valuation μ est définie par une famille continue $\mathcal{C} = \big(\omega_{(a_\alpha,\delta_\alpha)}\big)_{\alpha\in A}$, et par hypothèse pour tout $c \in K$ il existe $\alpha \in A$ tel que $\mu(x-c) < \mu(x-a_\alpha) = \delta_\alpha$, d'où $\nu(a_\alpha - c) < \delta_\alpha$. □

Remarque 2.12. *Si μ_1 et μ_2 sont deux valuations bien spécifiées de $K[x]$ définies respectivement par $\mu_1 = \omega_{(a_1,\delta_1)}$ et $\mu_2 = \omega_{(a_2,\delta_2)}$, nous avons $\mu_1 \le \mu_2$ si et seulement si $\delta_1 \le \delta_2$ et $\delta_1 \le \nu(a_1 - a_2)$, c'est-à-dire si et seulement si $B(a_2,\delta_2) \subset B(a_1,\delta_1)$.*

Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ de la forme $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, sans supposer que le corps K soit algébriquement clos. Si δ n'appartient pas au groupe Γ_ν, le groupe des ordres Γ_μ est égal à $\Gamma_\nu \oplus \delta\mathbb{Z}$ et nous avons

$$rang.\Gamma_\mu/\Gamma_\nu = rang.rat.\Gamma_\mu/\Gamma_\nu = 1 \quad \text{et} \quad \kappa_\mu = \kappa_\nu\ .$$

Si δ appartient au groupe Γ_ν, alors le groupe des ordres Γ_μ est égal à Γ_ν et le corps résiduel κ_μ est une extension transcendante de κ_ν engendré par l'image de $b(x-a)$ où $b \in K$ avec $\nu(b) = -\delta$, d'où :

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\nu \quad \text{et} \quad dim.alg._{\kappa_\nu}\kappa_\mu = 1\ .$$

Dans tous les cas l'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ associée à la valuation bien spécifiée $\mu = \omega_{(a,\delta)}$ est isomorphe à $G^{(0)}[S]$, où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple isomorphe à $\mathrm{gr}_\nu K$, et S est l'image $H_\mu(x-a)$. Pour tout $a' \in K$ nous avons

$$\begin{array}{ll} H_\mu(x-a') = S & \text{si } \mu(x-a') = \mu(x-a) < \nu(a-a'), \\ H_\mu(x-a') = S - H_\nu(a-a') & \text{si } \mu(x-a') = \mu(x-a) = \nu(a-a'), \\ H_\mu(x-a') = H_\nu(a-a') & \text{si } \mu(x-a') = \nu(a-a') < \mu(x-a), \end{array}$$

d'où la remarque suivante.

Remarque 2.13. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ de la forme $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, alors le polynôme $(x-b)$ a son image $H_\mu(x-b)$ inversible dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K$ si et seulement si $\nu(a-b) < \delta$.*

3. Passage à la clôture algébrique

Dans cette partie nous nous donnons un corps valué (K,ν), une clôture algébrique $\bar{K}$ de K et une valuation $\bar{\nu}$ de $\bar{K}$ qui prolonge la valuation ν, nous considérons une valuation μ de $K[x]$ qui prolonge la valuation ν et nous allons étudier les prolongements $\bar{\mu}$ à $\bar{K}[x]$ de μ qui sont aussi des prolongements de la valuation $\bar{\nu}$.

Définition. *Pour tout polynôme f de $K[x]$ nous définissons l'*étendue *de f, que nous notons $\varepsilon_\mu(f)$, par*

$$\varepsilon_\mu(f) \ = \ Sup\left(\bar{\mu}(x-a)\ ;\ a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}\right)\ ,$$

où $\bar{\mu}$ est un prolongement de la valuation μ.

Proposition 3.1. *L'étendue du polynôme f est indépendante du prolongement $\bar{\mu}$ choisi.*

Preuve. Soient $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2$ deux prolongements de la valuation μ de $K[x]$ à $\bar{K}[x]$, alors il existe σ dans $Aut(\bar{K}(x)/K(x)) \simeq Aut(\bar{K}/K)$ tel que $\mu_1 = \mu_2 \circ \sigma$, en particulier pour tout $a \in \bar{K}$ nous avons

$$\bar{\mu}_1(x-a) \;=\; \bar{\mu}_2(x-\sigma(a)) \ .$$

Comme le groupe $Aut(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur les racines du polynôme f nous en déduisons que les ensembles $\left\{\bar{\mu}_1(x-a) \ ; \ a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}\right\}$ et $\left\{\bar{\mu}_2(x-a) \ ; \ a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}\right\}$ sont égaux.

□

Proposition 3.2. *La valuation $\bar{\mu}$ est bien spécifiée si et seulement si la valuation μ l'est.*

Preuve. Comme la valuation $\bar{\mu}$ est une extension de la valuation μ nous avons un morphisme injectif canonique d'algèbres graduées intègres

$$\rho : \mathrm{gr}_\mu(K[x]) \hookrightarrow \mathrm{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x]) \ .$$

Nous supposons d'abord que la valuation μ n'est pas bien spécifiée, alors l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$ est simple, et nous devons montrer que pour tout $a \in \bar{K}$, l'élément $H_{\bar{\mu}}(x-a)$ est inversible dans $\mathrm{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$. Soit $a \in \bar{K}$, et soit ϕ le polynôme minimal de a sur K, nous écrivons $\phi(x) = \prod_{i=1}^{d}(x-a_i)$, où les a_i sont les racines de ϕ dans $\bar{K}$. L'image de $H_\mu(\phi)$ par ρ est égale au produit

$$\prod_{i=1}^{d} H_{\bar{\mu}}(x-a_i) \ ,$$

et comme $H_\mu(\phi)$ est inversible dans $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$, chacun des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x-a_i)$ est inversible dans $\mathrm{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$.

Réciproquement nous supposons que la valuation μ est bien spécifiée, alors l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$ est isomorphe à une algèbre de polynômes $G^{(0)}[T]$, où $G^{(0)}$ est une algèbre simple et T est l'image $H_\mu(\phi)$ du polynôme-clé ϕ qui définit la valuation μ.

Si la valuation $\bar{\mu}$ n'était pas bien spécifiée, l'image de T par ρ serait inversible dans $\mathrm{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$ et il existerait en particulier $b \in \bar{K}$ tel $\rho(T) = H_{\bar{\mu}}(b)$. Il existe un polynôme à coefficients dans K, dont b est une racine, $c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1X + c_0$, avec $c_j \in K$ et $c_0 \neq 0$. En particulier, si nous nous restreignons aux termes de valuation minimale, il existe k, $k \geq 2$, et $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ tels que

$$H_{\bar{\mu}}(c_{i_k}b^{i_k}) + H_{\bar{\mu}}(c_{i_{k-1}}b^{i_{k-1}}) + \ldots + H_{\bar{\mu}}(c_{i_1}b^{i_1}) \;=\; 0$$

dans $\mathrm{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$. Nous en déduirions la relation

$$H_\mu(c_{i_k})T^{i_k} + H_\mu(c_{i_{k-1}})T^{i_{k-1}} + \ldots + H_\mu(c_{i_1})T^{i_1} \;=\; 0$$

dans $\mathrm{gr}_\mu(K[x]) = G^{(0)}[T]$, ce qui est impossible car les $H_\mu(c_i)$ sont dans $G^{(0)}$.

□

Proposition 3.3. *Soit f un polynôme dans $K[x]$ alors son image $H_\mu(f)$ est inversible dans* $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$ *si et seulement si son image $H_{\bar{\mu}}(f) = \rho(H_\mu(f))$ est inversible dans* $\mathrm{gr}_\mu(\bar{K}[x])$.

Preuve. L'implication $H_\mu(f)$ inversible $\Rightarrow$ $H_{\bar\mu}(f)$ inversible est évidente.

Pour montrer l'implication réciproque, nous pouvons supposer que les valuations μ et $\bar\mu$ sont bien spécifiées, et soit $f \in K[x]$ tel que $H_{\bar\mu}(f)$ est inversible. Alors il existe $b \in \bar K$ tel que $H_{\bar\mu}(f) = H_{\bar\mu}(b)$, et comme dans la démonstration précédente nous pouvons trouver des entiers k, $k \geq 2$, et $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, et des éléments $c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}$ dans K non nuls tels que

$$H_{\bar\mu}(c_{i_k} b^{i_k}) + H_{\bar\mu}(c_{i_{k-1}} b^{i_{k-1}}) + \ldots + H_{\bar\mu}(c_{i_1} b^{i_1}) \ = \ 0$$

dans $\mathrm{gr}_{\bar\mu}(\bar K[x])$. Nous en déduisons que nous avons

$$\big(H_\mu(c_{i_k} f^{i_k - i_1 - 1}) + \ldots + H_\mu(c_{i_2} f^{i_2 - i_1 - 1})\big) H_\mu(f) + H_\mu(c_{i_1}) \ = \ 0 \ ,$$

et par conséquent $H_\mu(f)$ est inversible.

$\square$

Théorème 3.4. *La valuation μ est bien spécifiée si et seulement si l'ensemble*

$$E_\mu = \{\varepsilon_\mu(f) \mid f \in K[x]\}$$

admet un plus grand élément $\overline{\varepsilon_\mu}$.

Dans ce cas un polynôme ϕ définit la valuation μ si et seulement si ϕ est un polynôme unitaire de $K[x]$ de degré minimal vérifiant $\varepsilon_\mu(\phi) = \overline{\varepsilon_\mu}$.

Preuve. D'après la proposition 3.2 la valuation μ est bien spécifiée si et seulement si la valuation $\bar\mu$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si l'ensemble $\Lambda_{\bar\mu} = \{\bar\mu(x-b) \mid b \in \bar K\}$ admet un plus grand élément $\lambda_{\bar\mu}$ (cf. proposition 2.10).

Supposons que la valuation μ est bien spécifiée et soit $a \in \bar K$ tel que $\lambda_{\bar\mu} = \bar\mu(x-a)$, alors par définition pour tout polynôme f dans $K[x]$ nous avons l'inégalité $\varepsilon_\mu(f) \leq \lambda_{\bar\mu}$. Si ϕ est le polynôme minimal de a dans $K[x]$, plus généralement si ϕ est un polynôme dans $K[x]$ qui admet a comme racine, nous avons par définition $\bar\mu(x-a) \leq \varepsilon_\mu(\phi)$. Nous en déduisons que l'ensemble E_μ admet un plus grand élément $\overline{\varepsilon_\mu}$ égal à $\lambda_{\bar\mu}$, et que la valeur $\overline{\varepsilon_\mu}$ est atteinte pour tout polynôme ϕ de $K[x]$ admettant a comme racine.

Réciproquement supposons que la valuation μ n'est pas bien spécifiée, l'ensemble $\Lambda_{\bar\mu}$ n'admet pas de plus grand élément, en particulier pour tout polynôme f de $K[x]$ nous pouvons trouver $a \in \bar K$ tel que $\bar\mu(x-a) > \bar\mu(x-b)$ pour toute racine b de f. Un polynôme g dans $K[x]$ admettant a comme racine vérifie alors $\varepsilon_\mu(g) > \varepsilon_\mu(f)$, par conséquent l'ensemble E_μ n'admet pas de plus grand élément.

Soit ϕ un polynôme de $K[x]$ qui définit la valuation μ alors nous avons un isomorphisme

$$\mathrm{gr}_\mu K[x] \ = \ G^{(0)}[T] \ ,$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple et T est l'image $H_\mu(\phi)$ du polynôme ϕ et nous écrivons comme précédemment $\phi(x) \ = \ \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, où les racines a_i de ϕ dans $\bar K$ vérifient

$$\varepsilon_\mu(\phi) = \bar\mu(x-a_1) = \ldots = \bar\mu(x-a_c) > \bar\mu(x-a_{c+1}) \geq \ldots \geq \bar\mu(x-a_d) \ .$$

Nous ne supposons pas que le polynôme ϕ est séparable, par conséquent les racines $a_1, \ldots, a_d$ de ϕ ne sont pas supposées distinctes. L'image $\rho(T)$ de T dans $\mathrm{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$ est alors égale au produit

$$\prod_{i=1}^{d} H_{\bar{\mu}}(x - a_i) \ ,$$

et nous déduisons de la démonstration de la proposition 3.2 que $\rho(T)$ n'est pas inversible. En particulier un des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x - a_i)$ est non inversible, par conséquent nous avons l'égalité $\bar{\mu}(x - a_i) = \lambda_{\bar{\mu}} = Sup\{\bar{\mu}(x - b) \mid b \in \bar{K}\}$, d'où $\varepsilon_\mu(\phi) = \lambda_{\bar{\mu}}$.

Réciproquement supposons que l'ensemble $E_\mu = \{\varepsilon_\mu(f) \mid f \in K[x]\}$ admet un plus grand élément $\overline{\varepsilon_\mu}$ et soit ϕ un polynôme unitaire de $K[x]$ vérifiant $\varepsilon_\mu(\phi) = \overline{\varepsilon_\mu}$. Nous écrivons encore $\phi = \prod_{i=1}^{d}(x - a_i)$ et si $H_\mu(\phi)$ était inversible dans $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$ nous déduirions comme précédemment que chacun des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x - a_i)$ serait inversible dans $\mathrm{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$, en particulier il existerait $a \in \bar{K}$ tel que $\bar{\mu}(x - a_i) < \bar{\mu}(x - a)$, ce qui contredit l'hypothèse $\varepsilon_\mu(\phi) = \overline{\varepsilon_\mu}$.

□

Corollaire 3.5. *Le polynôme irréductible ϕ de $K[x]$ définit la valuation μ si et seulement si une racine a de ϕ dans $\bar{K}$ définit une valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ qui prolonge μ.*

Plus précisément si nous écrivons $\phi(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - a_i)$, avec $a = a_1$ et où les racines a_i de ϕ dans $\bar{K}$ vérifient

$$\varepsilon_\mu(\phi) = \bar{\mu}(x - a_1) = \ldots = \bar{\mu}(x - a_c) > \bar{\mu}(x - a_{c+1}) \geq \ldots \geq \bar{\mu}(x - a_d) \ .$$

la valuation $\bar{\mu}$ est la valuation associée à la paire (a_i, δ) pour $1 \leq i \leq c$ et $\delta = \varepsilon_\mu(\phi)$.

□

Dans la suite nous appelons p l'exposant caractéristique du corps K, i.e. $p = 1$ si K est de caractéristique nulle et p est égal à la caractéristique de K sinon.

Soit a un élément de $\bar{K}$ et soit ϕ son polynôme irréductible sur K alors il existe un polynôme irréductible séparable sur K, ϕ_{sep}, et un entier $n \geq 0$ tel que nous ayons l'égalité $\phi(x) = \phi_{\mathrm{sep}}(x^{p^n})$. Le degré d_{s} du polynôme ϕ_{sep} est par définition le degré de séparabilité de l'extension (L/K), où L est la sous-extension de $\bar{K}$ engendrée par a, $L = K(a) \simeq K[x]/(\phi)$, et nous avons $d = [L : K] = p^n d_{\mathrm{s}}$ et $d_{\mathrm{s}} = [L : K]_{\mathrm{sep}} = [G : H]$, où nous appelons respectivement G et H les groupes de Galois $Gal(\bar{K}/K)$ et $Gal(\bar{K}/L)$. En particulier nous pouvons identifier H au sous-groupe $\{\sigma \in G \ / \ \sigma(a) = a\}$. Si nous posons $Rac(\phi) = \{a_1, \ldots, a_{d_{\mathrm{s}}}\}$ alors nous avons :

$$\phi(x) \ = \ \phi_{\mathrm{sep}}(x^{p^n}) \ = \ \prod_{i=1}^{d_{\mathrm{s}}}(x - a_i)^{p^n} \ ,$$

Comme précédemment nous considérons une valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ bien spécifiée, c'est à dire de la forme

$$\mu = [\mu_\sharp \ ; \ \mu(\phi) = \gamma] \ ,$$

telle que le polynôme-clé ou le polynôme-clé limite ϕ est de degré d, $d \geq 2$, et nous posons $\phi(x) = \phi_{\mathrm{sep}}(x^{p^n})$ avec ϕ_{sep} séparable de degré d_{s}.

Il existe une racine a_1 du polynôme ϕ dans $\bar{K}$ et une valuation $\bar{\mu}$ de l'anneau $\bar{K}[x]$ qui prolonge la valuation μ qui est de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a_1,\delta)}$ pour une certaine valeur δ, et nous notons a_j, $1 \leq j \leq d_{\mathrm{s}}$, les racines de ϕ de telle façon que nous ayons

$$\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \bar{\nu}(a_1 - a_{j+1}) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq d_{\mathrm{s}} - 1 \ .$$

Pour toute valeur δ dans $\tilde{\Gamma}$ nous notons $c(\delta)$ le plus petit entier j, $1 \leq j \leq d_{\mathrm{s}}$, tel que nous ayons $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \delta$, en particulier si $c(\delta) < n$ nous avons

$$\bar{\nu}(a_1 - a_{c(\delta)}) \geq \delta > \bar{\nu}(a_1 - a_{c(\delta)+1}) \ .$$

La valuation $\omega_{(a_1,\delta)}$ vérifie alors $\omega_{(a_1,\delta)} = \omega_{(a_j,\delta)}$ pour $1 \leq j \leq c(\delta)$ et nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} &\omega_{(a_1,\delta)}(x - a_j) = \delta \text{ pour } 1 \leq j \leq c(\delta) \\ &\omega_{(a_1,\delta)}(x - a_j) = \bar{\nu}(a_1 - a_j) < \delta \text{ pour } c(\delta) + 1 \leq j \leq d_{\mathrm{s}} \ . \end{aligned}$$

Lemme 3.6. *Avec les notations précédentes supposons que la valuation $\omega_{(a_1,\delta)}$ soit un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$, alors nous avons :*

$$\mu(\phi) \ = \ \gamma \ = \ p^n \left(c(\delta)\delta + \sum_{j=c(\delta)+1}^{d_{\mathrm{s}}} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right) \ \leq \ p^n d_{\mathrm{s}} \delta \ = \ \deg\phi \ \delta \ ,$$

avec l'inégalité stricte $\mu(\phi) < \deg\phi \ \delta$ seulement dans le cas où $c(\delta) < d_{\mathrm{s}}$, c'est-à-dire dans le cas où la valuation μ admet plusieurs prolongements distincts à $\bar{K}[x]$.

Proposition 3.7. *Pour toute racine a du polynôme-clé ϕ il existe au plus une valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ qui prolonge les valuations $\bar{\nu}$ et μ qui soit de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$.*

Preuve. Soit $a = a_1$ une racine de ϕ, nous choisissons les autres racines a_i de façon à avoir les inégalités $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \bar{\nu}(a_1 - a_{j+1})$. Supposons que nous ayons deux valeurs δ et δ' dans $\tilde{\Gamma}$ telles que les valuations $\omega_{(a_1,\delta)}$ et $\omega_{(a_1,\delta')}$ soient des prolongements de la valuation μ, et notons respectivement c et c' les plus petits entiers tels que nous ayons $\bar{\nu}(a_1 - a_c) \geq \delta$ et $\bar{\nu}(a_1 - a_{c'}) \geq \delta'$.

D'après le lemme 3.6 nous avons l'égalité :

$$p^n \left(c\delta + \sum_{j=c+1}^{d_{\mathrm{s}}} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right) \ = \ p^n \left(c'\delta' + \sum_{j=c'+1}^{d_{\mathrm{s}}} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right) \ .$$

Si $c = c'$ nous en déduisons l'égalité $\delta = \delta'$.

Si $c' > c$ alors nous avons $\delta > \bar{\nu}(a_1 - a_{c'}) \geq \delta'$, et nous déduisons de l'égalité précédente que nous avons

$$c\delta + \sum_{j=c+1}^{c'} \bar{\nu}(a_1 - a_j) = c'\delta' \ ,$$

avec $\delta > \delta'$ et $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \delta'$ pour tout $j \leq c'$, ce qui est impossible.

$\square$

Nous déduisons de ce qui précède que si les racines du polynôme ϕ sont très proches pour la distance définies par $\bar{\nu}$ sur $\bar{K}$ la valuation μ, définie par le polynôme ϕ admet un seul prolongement.

Proposition 3.8. *La valuation μ admet un unique prolongement $\bar{\mu}$ à $\bar{K}[x]$ si et seulement si nous avons pour tout couple de racines (a,b) de ϕ :*

$$\bar{\nu}(a-b) \ \geq \ \mu(\phi)/\mathrm{deg}\phi \ .$$

Preuve. Supposons que la valuation μ admette un seul prolongement $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$, alors nous avons pour toute racine b l'inégalité $\bar{\nu}(a-b) \geq \delta$ avec $\delta = \mu(\phi)/\mathrm{deg}\phi$.

Supposons maintenant que nous avons l'inégalité $\bar{\nu}(a-b) \geq \mu(\phi)/\mathrm{deg}\phi$ pour tout couple (a,b) de racines, et soit $\bar{\mu}$ un prolongement de μ de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$. Nous notons c le nombre de racines b vérifiant $\bar{\nu}(a-b) \geq \delta$ et $d = p^n d_{\mathrm{s}} = \mathrm{deg}\phi$, et nous déduisons alors du lemme 3.6 la relation

$$\mu(\phi) \ = \ p^n \Bigg(c\delta + \sum_{\{b/\bar{\nu}(a-b)<\delta\}} \bar{\nu}(a-b) \Bigg) \ \geq \ p^n c\delta + p^n (d_{\mathrm{s}} - c)\mu(\phi)/d \ ,$$

d'où le résultat.

□

Dans la suite de ce paragraphe nous supposerons que le corps valué (K,ν) est hensélien, la valuation ν admet donc un seul prolongement noté $\bar{\nu}$ au corps $\bar{K}$, en particulier pour tout automorphisme σ dans le groupe de Galois $G = Gal(\bar{K}/K)$ la valuation $\bar{\nu} \circ \sigma$ est égale à la valuation $\bar{\nu}$.

Théorème 3.9. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par un polynôme ϕ de degré d, et soit a une racine de ϕ dans $\bar{K}$. Alors il existe une valeur δ dans $\tilde{\Gamma}$ et des automorphismes $\sigma_1 = id, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, avec $1 \leq k \leq d$, dans le groupe de Galois $G = Gal(\bar{K}/K)$ tels que les prolongements $\bar{\mu}^{(l)}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ sont les valuations $\omega_{(\sigma_l(a),\delta)}$, pour $1 \leq l \leq k$.*

Preuve. Si $\bar{\mu}$ est un prolongement de la valuation μ, alors tous les prolongements de μ sont de la forme $\bar{\mu} \circ \sigma$ pour σ appartenant au groupe de Galois $Gal(\bar{K}/K)$. Supposons que $\bar{\mu}$ soit la valuation $\omega_{(a,\delta)}$ pour une racine a de ϕ, alors la valuation $\bar{\mu} \circ \sigma$ est la valuation $\omega_{(\sigma^{-1}(a),\delta)}$. En effet la valuation $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$ est déterminée par l'égalité

$$\bar{\mu}(x-b) \ = \ Inf\big(\delta, \bar{\nu}(a-b)\big) \ ,$$

où b parcourt $\bar{K}$.

Comme (K,ν) est hensélien nous en déduisons que pour tout b nous avons

$$\bar{\mu} \circ \sigma(x-b) \ = \ Inf\big(\delta, \bar{\nu}(a-\sigma(b))\big) \ = \ Inf\big(\delta, \bar{\nu}(\sigma^{-1}(a)-b)\big) \ .$$

Comme le groupe de Galois agit transitivement sur les racines du polynôme ϕ nous en déduisons que pour toute racine a de ϕ il existe un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ de la forme $\omega_{(a,\delta)}$, et nous déduisons de la proposition 3.7 que la valeur δ est déterminée uniquement par la valuation μ.

□

Les différents prolongements de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ correspondent aux différentes boules fermées $B(a,\delta)$ de $\bar{K}$ où a parcourt l'ensemble $Rac(\phi)$ des racines distinctes de ϕ, et deux boules $B(a,\delta)$ et $B(a',\delta)$ sont disjointes si $\bar{\nu}(a-a') < \delta$ ou égales sinon.

Soit B une boule fermée de $\bar{K}$, alors pour tout σ dans le groupe de Galois G la boule $\sigma.B$ est égale à B si pour tout a dans B l'image $\sigma(a)$ appartient à B et est disjointe de B sinon, en fait il suffit qu'il existe un élément a de B tel que son image appartienne à B pour que $\sigma.B$ soit égale à B. Nous pouvons définir H_B par

$$H_B \ := \ \{\sigma \in G \ /\sigma.B = B\} \ .$$

Il est facile de vérifier que les H_B sont des sous-groupes du groupe de Galois G qui vérifient

(1) $H_B \subset H_{B'}$ pour $B \subset B'$;

(2) $H_{\tau.B} = \tau.H_B.\tau^{-1}$.

Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble quotient G/H_B et l'ensemble $\{B^{(l)}\}$ des boules fermées disjointes conjuguées à B par l'action du groupe de Galois G.

Si un élément b de $\bar{K}$ appartient à B, la boule B est la boule fermée $B(b,\delta)$ et le sous-groupe H_B s'identifie au sous-groupe $H_{(b,\delta)}$ défini par

$$H_{(b,\delta)} \ := \ \{\sigma \in G \ /\bar{\nu}(b-\sigma(b)) \geq \delta\} \ ,$$

et comme précédemment nous avons $H_{(b,\delta)} \subset H_{(b,\delta')}$ pour $\delta \geq \delta'$, et $H_{(\tau(b),\delta)} = \tau.H_{(b,\delta)}.\tau^{-1}$. Rappelons que pour tout élément b de $\bar{K}$ nous définissons la *constante de Krasner* $\Delta_K(b)$ par

$$\Delta_K(b) \ = \ Sup\big(\bar{\nu}(b-b') \ ; \ b' \text{ conjugué de } b \ , \ b' \neq b\big) \ .$$

Alors, pour $\delta > \Delta_K(b)$ le sous-groupe $H_{(b,\delta)}$ est égal au groupe de Galois $H = Gal(\bar{K}/K(b))$.

La bijection naturelle entre l'ensemble quotient G/H et l'ensemble $Rac(\psi)$ des racines du polynôme irréductible $\psi = Irr_K(b)$ de b sur K induit une bijection entre H_B/H et l'ensemble $Rac_B(\psi)$ des racines de ψ appartenant à la boule fermée $B = B(b,\delta)$. En particulier l'ensemble G/H_B est fini et il existe $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ dans G tels que l'ensemble $\{B^{(l)}\}$ des boules fermées conjuguées à B soit égal à $\{\sigma_l.B\}$, avec $\sigma_1 = id$ et $B_{(1)} = B$. En particulier les prolongements $\bar{\mu}^{(l)}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ définis au théorème 3.9 sont les valuations associées aux boules $B^{(l)}$.

Nous définissons la *distance* $\eta_{l,l'}$ entre deux boules distinctes $B_{(l)}$ et $B_{(l')}$ par

$$\eta_{l,l'} = \bar{\nu}(b-b') \text{ pour } b \in B_{(l)} \text{ et } b' \in B_{(l')} \ ,$$

et ceci est indépendant des éléments b et b' choisis car la distance associée à $\bar{\nu}$ est ultra-métrique, et vérifie $\eta_{l,l'} < \delta$.

Soit b appartenant à $\bar{K}$, nous notons L l'extension $K(b)$, ψ son polynôme irréductible sur K, ψ_{sep} le polynôme irréductible séparable associé, et nous posons $d = p^n d_{\text{s}}$ où $d = \deg\,\psi = [L:K]$ et $d_{\text{s}} = \deg\,\psi_{\text{sep}} = [L:K]_{\text{sep}} = [G:H]$, avec $H = Gal(\bar{K}/L)$.

Proposition 3.10. *Si b appartient à la boule B nous avons l'inclusion $H \subset H_B$ et si nous posons $c = [H_B : H]$ et $k = [G : H_B]$, nous avons l'égalité*

$$d_{\text{s}} = kc \ .$$

De plus nous pouvons trouver $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_c$ dans G avec $\delta_1 = id$, tels que pour tout l, $1 \leq l \leq k$, l'ensemble $Rac_{B^{(l)}}(\phi)$ des racines de ϕ appartenant à la boule $B^{(l)}$ est égal à l'ensemble $\{\sigma_l\delta_i(b), 1 \leq i \leq c\}$.

Preuve. C'est une conséquence de l'égalité $H_B = H_{(b,\delta)}$ et du fait que la valuation $\bar{\nu} \circ \sigma$ est égale à la valuation $\bar{\nu}$ pour tout σ dans G.

□

Corollaire 3.11. *Soient μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$, $\bar{\mu}$ un prolongement de μ à $\bar{K}[x]$ associé à la boule fermée B de diamètre δ et b un élément de $\bar{K}$ appartenant à B de polynôme irréductible sur K $Irr_K(b) = \psi$. Alors avec les notations précédentes nous avons*

$$\mu(\psi) \ = \ p^n c\left(\delta + \sum_{l=2}^{k} \eta_{1,l}\right) \ \leq \ \deg\psi.\delta \ .$$

□

En particulier nous retrouvons que si la valuation μ est définie par le polynôme ϕ nous avons l'inégalité $\gamma = \mu(\phi) \leq \deg\phi.\delta$, avec égalité si et seulement si la valuation μ admet un seul prolongement à $\bar{K}[x]$.

D'après la proposition 2.11 nous pouvons associer à une valuation de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$ la boule fermée $B = B(a, \delta)$ de $\bar{K}$, et la valuation est entièrement déterminée par B, et nous déduisons du théorème 3.9 nous pouvons associer à la valuation μ de $K[x]$ une famille $\mathcal{B}(\mu) = \left(B^{(l)}\right)_{1 \leq l \leq k}$ de boules fermées disjointes, de même diamètre δ, chacune des boules $B^{(l)}$ correspondant à la valuation $\bar{\mu}^{(l)}$.

Proposition 3.12. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ et soit $\mathcal{B}(\mu) = \left(B^{(l)}\right)_{1 \leq l \leq k}$ la famille de boules fermées de $\bar{K}$ associée. Alors un polynôme f de $K[x]$ a son image $H_\mu(f)$ non inversible dans $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$ si et seulement si l'ensemble $Rac(f)$ des racines de f est inclus dans la réunion des boules fermées $\bigcup_{1 \leq l \leq k} B^{(l)}$.*

Preuve. Soit $\bar{\mu}$ un prolongement de μ à $\bar{K}[x]$ de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$, d'après la proposition 3.3 le polynôme f a son image $H_\mu(f)$ non inversible dans $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$ si et seulement si f a une racine b tel que $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$. Comme le groupe de Galois agit transitivement sur l'ensemble des racines $Rac(f)$ et sur l'ensemble des boules $\mathcal{B}(\mu)$, nous en déduisons le résultat.

□

Remarque 3.13. *A toute valuation bien spécifiée μ de $K[x]$, nous pouvons associer l'entier k défini comme le nombre de boules fermées distinctes $B^{(l)}$ conjuguées à la boule fermée B associée à un prolongement $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$.*

Nous déduisons de ce qui précède que tout polynôme irréductible ψ de $K[x]$ ayant une racine dans B est de degré divisible par k. En particulier si k ne divise pas le degré d'un polynôme f son image $H_\mu(f)$ est inversible dans $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$.

Nous voulons étudier les prolongements $\bar{\mu}_i$ des valuations μ_i appartenant à une famille admise $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i \in I}$ de valuations de $K[x]$. Pour cela il nous faut d'abord étudier les prolongements à $\bar{K}[x]$ de deux valuations dont l'une est valuation augmentée de l'autre.

Théorème 3.14. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ obtenue comme valuation augmentée $\mu = [\mu_\sharp\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$ et soit $\bar{\mu}_\sharp$ un prolongement de la valuation $\mu_\sharp$ à $\bar{K}[x]$. Alors il existe un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ qui est obtenu comme valuation augmentée $\bar{\mu} = [\bar{\mu}_\sharp\ ;\ \bar{\mu}(\bar{\phi}) = \bar{\gamma}]$.*

Preuve. Comme la valuation $\mu_\sharp$ admet une valuation augmentée elle est bien spécifiée, alors pour tout prolongement $\bar{\mu}_\sharp$ il existe une racine $a_\sharp$ du polynôme-clé $\phi_\sharp$ définissant la valuation $\mu_\sharp$ et une valeur $\delta_\sharp$ dans $\tilde{\Gamma}$ telles que le prolongement $\bar{\mu}_\sharp$ soit la valuation $\omega_{(a_\sharp,\delta_\sharp)}$.

Comme le polynôme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation $\mu_\sharp$ son image $H_{\mu_\sharp}(\phi)$ dans l'anneau gradué $\mathrm{gr}_{\mu_\sharp} K[x]$ n'est pas inversible. Par conséquent il existe au moins une racine a de ϕ dans $\bar{K}$ telle que $H_{\bar{\mu}_\sharp}(x-a)$ ne soit pas inversible dans l'anneau gradué $\mathrm{gr}_{\bar{\mu}_\sharp}\bar{K}[x]$, d'où d'après la remarque 2.13 l'inégalité $\bar{\nu}(a - a_\sharp) \geq \delta_\sharp$. Nous en déduisons que la valuation $\bar{\mu}_\sharp$ peut sécrire $\bar{\mu}_\sharp = \omega_{(a,\delta_\sharp)}$

Soit $\bar{\mu}$ le prolongement de la valuation μ associé à la racine a du polynôme ϕ, c'est-à-dire qui est de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$. Deux valuations de la forme $\rho_1 = \omega_{(a,\delta_1)}$ et $\rho_2 = \omega_{(a,\delta_2)}$ sont comparables et vérifient $\rho_1 \leq \rho_2$ si et seulement si $\delta_1 \leq \delta_2$. Par conséquent comme nous avons l'inégalité $\mu_\sharp \leq \mu$ nous avons les inégalités $\delta_\sharp \leq \delta$ et $\bar{\mu}_\sharp \leq \bar{\mu}$. Nous en déduisons le résultat car les seuls polynômes-clés sur $\bar{K}[x]$ sont des polynômes de degré 1, et nous pouvons prendre $\bar{\phi} = x - a$.

□

Proposition 3.15. *Soient $\bar{\mu}_\sharp = \omega_{(a_\sharp,\delta_\sharp)}$ et $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$ les deux valuations définies dans le théorème précédent, et supposons que les polynômes $\phi_\sharp$ et ϕ ne sont pas $\mu_\sharp$-équivalents, alors nous avons l'égalité :*

$$\bar{\nu}(a - a_\sharp) = \delta_\sharp$$

Preuve. Nous déduisons de la proposition 3.3 que pour toute valuation μ de $K[x]$ et tout prolongement $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$ de μ à $\bar{K}[x]$, si un polynôme f de $K[x]$ n'est pas μ-inversible alors il existe une racine b de f telle que $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$.

Comme les polynômes $\phi_\sharp$ et ϕ ne sont pas $\mu_\sharp$-équivalents, le polynôme $\phi_\sharp$ est μ-inversible, nous en déduisons l'inégalité $\bar{\nu}(a - a_\sharp) < \delta$, par conséquent nous avons $\bar{\mu}(x - a_\sharp) = \bar{\nu}(a - a_\sharp) < \delta = \bar{\mu}(x-a)$. Nous déduisons aussi du fait que $\phi_\sharp$ est μ-inversible, l'égalité $\delta_\sharp = \bar{\mu}_\sharp(x-a_\sharp) = \bar{\mu}(x-a_\sharp)$, d'où le résultat.

□

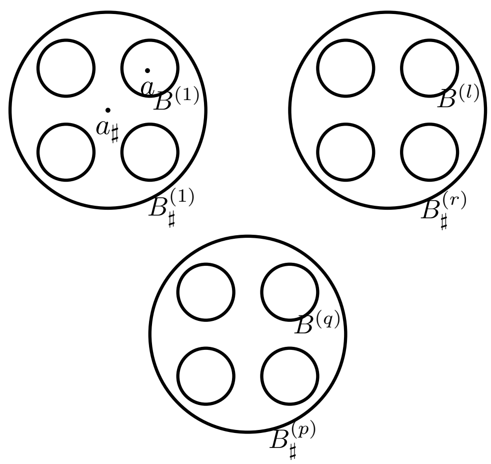
Soit μ une valuation bien spécifiée obtenue comme valuation augmentée de la valuation $\mu_\sharp$ telle que les polynômes $\phi_\sharp$ et ϕ ne sont pas $\mu_\sharp$-équivalents, nous appelons $\mathcal{B}(\mu_\sharp) = \left(B_\sharp^{(l)}\right)_{1\leq l\leq k_\sharp}$ et $\mathcal{B}(\mu) = \left(B^{(l)}\right)_{1\leq l\leq k}$ les familles de boules fermées de $\bar{K}$ associées respectivement aux valuations $\mu_\sharp$ et μ.

Soit $\bar{\mu}_\sharp^{(r)}$ le prolongement de la valuation $\mu_\sharp$ associé à la boule $B_\sharp^{(r)} = B(a_\sharp^{(r)}, \delta_\sharp)$, alors pour toute racine $a^{(l)}$ du polynôme ϕ vérifiant $\bar{\nu}(a^{(l)} - a_\sharp^{(r)}) \geq \delta_\sharp$ la boule fermée associée $B^{(l)} = B(a^{(l)}, \delta)$ est incluse dans $B_\sharp^{(r)}$. Comme le groupe de Galois $G = Gal(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur les ensembles des racines $\left\{a_\sharp^{(r)}\right\}$ et $\left\{a^{(l)}\right\}$ respectivement des polynômes $\phi_\sharp$ et ϕ nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 3.16. *Chaque boule $B_\sharp^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_\sharp)$ contient s boules $B^{(l)}$ appartenant à $\mathcal{B}(\mu)$, où s est un entier strictement positif indépendant de la boule $B_\sharp^{(r)}$ choisie, et toute boule $B^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu)$ est contenue dans une boule $B_\sharp^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_\sharp)$.*

□

Nous pouvons représenter les boules dans $\bar{K}$ associées aux prolongements des valuations $\mu_\sharp$ et μ par le diagramme suivant :



Disposition des boules fermées des familles $\mathcal{B}(\mu_\sharp)$ et $\mathcal{B}(\mu)$ dans $\bar{K}$

Dans le cas où les polynômes $\phi_\sharp$ et ϕ sont $\mu_\sharp$-équivalents nous obtenons un résultat identique. En effet considérons deux valuations bien spécifiées $\mu_\sharp$ et μ de $K[x]$ définies par le même polynôme ϕ et par des valeurs $\gamma_\sharp$ et γ différentes avec $\gamma_\sharp < \gamma$. Soit a une racine de ϕ dans $\bar{K}$ et choisissons deux prolongements $\bar{\mu}_\sharp$ et $\bar{\mu}$ respectivement de $\mu_\sharp$ et μ à $\bar{K}[x]$, de la forme $\bar{\mu}_\sharp = \omega_{(a,\delta_\sharp)}$ et $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$. Comme les valuations $\omega_{(a,\delta_\sharp)}$ et $\omega_{(a,\delta)}$ sont comparables et comme nous avons $\mu_\sharp \leq \mu$ nous en déduisons l'inégalité $\delta_\sharp < \delta$. Si nous appelons $\mathcal{I}(\mu_\sharp) = (I_\sharp^{(l)}\ ;\ 1 \leq l \leq k_\sharp)$ et $\mathcal{I}(\mu) = (I^{(l)}\ ;\ 1 \leq l \leq k)$ les partitions de l'ensemble des racines de ϕ associées respectivement aux valuations $\mu_\sharp$ et μ, alors $\mathcal{I}(\mu)$ est plus fine que $\mathcal{I}(\mu_\sharp)$, et nous trouvons la même disposition des boules fermées associées aux valuations que précédemment.

Nous voulons étudier maintenant le cas d'une famille continue $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}$ de valuations de $K[x]$, pour tout α dans A nous notons $\mathcal{B}(\mu_\alpha) = \left(B_\alpha^{(l)}\right)_{1 \leq l \leq k_\alpha}$ la famille de boules fermées de $\bar{K}$ associée à la valuation μ_α et B_α la réunion $B_\alpha = \bigcup_{1 \leq l \leq k_\alpha} B_\alpha^{(l)}$. Nous déduisons de la proposition 3.16 qu'il existe α_0 tel que pour tout $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ dans A nous avons $k_\beta = k_\alpha$ et chaque boule $B_\alpha^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu_\alpha)$ contient une unique boule $B_\beta^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu_\beta)$, et notons $k_\mathcal{C} = k_\alpha$ pour $\alpha \geq \alpha_0$. Nous

posons alors
$$B_{\mathcal{C}}^{(l)} = \bigcap_{\alpha\in A, \alpha\geq\alpha_0} B_\alpha^{(l)} \quad \text{et} \quad B_{\mathcal{C}} = \bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha = \bigcup_{1\leq l\leq k_{\mathcal{C}}} B_{\mathcal{C}}^{(l)} \ .$$
L'ensemble $B_{\mathcal{C}}^{(l)}$ obtenu comme intersection d'une famille décroissante de boules fermées est une boule fermée, éventuellement vide. Le groupe de Galois $G = Gal(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur les racines des polynômes ϕ_α définissant les valuations μ_α, par conséquent toutes les boules $B_\alpha^{(l)}$ sont isomorphes.

Proposition 3.17. *Le polynôme ϕ appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall\alpha < \beta \in A\}$ si et seulement si l'ensemble des racines $Rac(\phi)$ de ϕ est inclus dans $B_{\mathcal{C}}$.*

Preuve. Si ϕ appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, pour tout α dans A l'image de ϕ dans $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ est non inversible et nous déduisons le résultat de la proposition 3.12.

□

Soient μ une valuation de $K[x]$ et $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$ la famille admise de valuations associée, chaque valuation μ_i de la famille $\mathcal{A}$ est bien spécifiée, définie par le polynôme-clé ϕ_i, et soit $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(\mu_i)$ la famille de boules fermées de $\bar{K}$ asspociée à μ_i par le théorème 3.9.

Proposition 3.18. *La famille $\left(\mathcal{B}_i\right)_{i\in I}$ est décroissante, c'est-à-dire pour tout $i < j$ dans I chaque boule $B_i^{(r)}$ de $\mathcal{B}_i$ contient s boules $B_j^{(l)}$ appartenant à $\mathcal{B}_j$, où s est un entier strictement positif indépendant de la boule $B_i^{(r)}$ choisie, et toute boule $B_j^{(l)}$ de $\mathcal{B}_j$ est contenue dans une boule $B_i^{(r)}$ de $\mathcal{B}_i$.*

Preuve. C'est une conséquence des propositions 3.16 et 3.17.

□

Soit μ une valuation de $K[x]$ et soit $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$ la famille admise associée.

Définition. *Nous appelons* ensemble caractéristique *de la valuation μ le sous-ensemble $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mu)$ de $\bar{K}$ obtenu comme l'intersection des ensembles B_i pour i dans I, où chaque B_i est la réunion des boules fermées $B_i^{(r)}$ appartenant à $\mathcal{B}(\mu_i)$.*

Il existe $i_0 \in I$ tel que les ensembles $\mathcal{B}(\mu_i)$ pour $i \geq i_0$ ont tous le même nombre s d'éléments, c'est-à-dire que pour tout $j \geq i \geq i_0$ chaque boule fermée $B_i^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_i)$ contient une unique boule fermée $B_j^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_j)$. Pour tout r, nous appelons $\mathcal{B}^{(r)}$ la famille décroissante de boules fermées $\left(B_i^{(r)}\right)_{i\geq i_0}$, et nous notons $\mathbf{B}^{(r)}$ l'intersection
$$\mathbf{B}^{(r)} \ = \ \bigcap_{i\geq i_0} B_i^{(r)} \ .$$
Le groupe de Galois $Gal(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur l'ensemble des familles $\mathcal{B}^{(r)}$, donc ces familles sont isomorphes et nous avons l'égalité :
$$\mathbf{B} \ = \ \bigcup_{1\leq r\leq s} \mathbf{B}^{(r)} \ .$$

D'après la proposition 2.11 chaque famille de boules fermées $\mathcal{B}^{(r)}$ définit une valuation $\bar{\mu}^{(r)}$ de $\bar{K}[x]$, et nous déduisons de ce qui précède le résultat suivant.

Théorème 3.19. *Les valuations $\bar{\mu}^{(r)}$ associées aux familles $\mathcal{B}^{(r)}$ sont les extensions à $\bar{K}[x]$ de la valuation μ.*

Si l'ensemble caractéristique $\mathbf{B}(\mu)$ de μ est vide la valuation μ n'est pas bien spécifiée, et chaque valuation $\bar{\mu}^{(r)}$ est définie par la suite pseudo-convergente associée à la famille $\mathcal{B}^{(r)}$.

Si l'ensemble caractéristique $\mathbf{B}(\mu)$ de μ est non vide la valuation μ est bien spécifiée, et chaque valuation $\bar{\mu}^{(r)}$ est définie par la boule fermée non vide $\mathbf{B}^{(r)}$.

Corollaire 3.20. *Soit μ une valuation de $K[x]$ et soit $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$ une famile admise associée, alors pour toute extension $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$, il existe une famille $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = \left(\bar{\mu}_i\right)_{i\in I}$ de valuations de $\bar{K}[x]$ correspondant à une suite décroissante $\left(B_i\right)_{i\in I}$ de boules fermées de $\bar{K}$ telle que pour tout $i \in I$ la valuation $\bar{\mu}_i$ est une extension de la valuation μ_i.*

Remarque 3.21. *Soit $(C, 0)$ une singularité de courbe plane dans $\mathbb{A}^2_k$ définie par un polynôme $f \in k[x, y]$ pour un choix judicieux des coordonnées x et y, nous considérons alors f comme un élément P de $K[x]$ où K est le corps $k(y)$ que nous munissons de la valuation y-adique ν. Alors l'étude de la singularité $(C, 0)$ est liée à l'étude des prolongements μ de la valuation ν au corps $L = K[x]/(P)$ et les valuations μ_i apparaissant dans la famille admise $\mathcal{A}$ associée à la pseudo-valuation $\bar{\mu}$ de $K[x]$ de noyau (P) définie par μ sont en reliées aux* paires de Puiseux *de la singularité $(C, 0)$ (cf. Exemple 3.2 de* [Va 4]*).*

Il est alors possible de voir une analogie entre la famille des boules $\left(B_i\right)_{i\in I}$ définie à la proposition 3.18 et l'action du groupe de Galois sur celle-ci, et la construction du carousel *donnée par Lê D.T. (voir par exemple* [Le 1] *ou* [Le 2]*).*

Remarque 3.22. *Soient ν une valuation de K, μ un prolongement de ν à l'extension $K(x)$ de K et $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$ la famille de valuations de $K(x)$ associée à μ considérée comme valuation de l'anneau des polynômes $K[x]$. D'après ce qui précède la famille $\mathcal{A}$ peut être définie en considérant la famille des boules $\left(B_i\right)_{i\in I}$ de $\bar{K}$, en particulier on peut en déduire que cette famille ne dépend pas du générateur x de l'extension $K(x)$ de K.*

Nous retrouvons ainsi le résultat principal de [Va 6].

4. Restriction d'une valuation définie sur $\bar{K}[x]$

Dans cette partie nous nous donnons une valuation $\bar{\mu}$ définie sur $\bar{K}[x]$ et nous voulons étudier sa restriction μ à l'anneau $K[x]$. Comme précédemment nous supposons que (K, ν) est un corps valué hensélien et la valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ est un prolongement de l'unique extension $\bar{\nu}$ de ν à la cloture algébrique $\bar{K}$ de K.

Pour tout b appartenant à $\bar{K}$ nous définissons le degré de b sur K comme le degré de l'extension algébrique qu'il engendre, c'est aussi la degré du polynôme irréductible $\mathrm{Irr}_K(b)$ de b sur K :

$$\deg_K(b) = \deg \mathrm{Irr}_K(b) = [K(b) : K]\ .$$

Proposition 4.1. *Soient $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\bar{K}[x]$ associée à une boule fermée B, μ la restriction de $\bar{\mu}$ à $K[x]$ et ϕ un polynôme de $K[x]$ définissant la valuation μ. Alors pour tout $b \in B$ nous avons l'inégalité :*

$$\deg_K(b) \geq \deg \phi \ .$$

Preuve. Nous déduisons de la remarque 2.13 que si b appartient à B l'image de $(x-b)$ est non-inversible dans $\mathrm{gr}_{\bar{\mu}}\bar{K}[x]$, alors l'image du polynôme $\mathrm{Irr}_K(b)$ est non inversible dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$, et par conséquent il vérifie l'inégalité $\deg \mathrm{Irr}_K(b)) \geq \deg \phi$.

□

Pour tout sous-ensemble E de $\bar{K}$ nous définissons le *degré de E sur k* par

$$\deg_K(E) := Inf\big(\deg_K(b) \ / \ b \in E\big) \ .$$

Théorème 4.2. *Soient $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\bar{K}[x]$ et B la boule fermée de $\bar{K}$ associée. Alors un polynôme irréductible ϕ de $K[x]$ définit la valuation μ restriction de $\bar{\mu}$ à $K[x]$ si et seulement si ϕ a une racine a appartenant à B avec*

$$\deg_K(a) \ = \ \deg_K(B) \ .$$

Preuve. Soit ϕ un polynôme qui définit la valuation μ, alors nous déduisons de la proposition 4.1 que tout b appartenant à B vérifie $\deg_K(b) \geq \deg\phi$ et comme ϕ a une racine appartenant à B nous trouvons $\deg\phi = \deg_K(B)$.

Réciproquement soit b appartenant à B avec $\deg_K(b) = \deg_K(B)$, et soit ψ son polynôme irréductible sur K. Les polynômes ϕ et ψ ont même degré d et si nous appelons respectivement d_{s} et d'_{s} le nombre de racines distinctes de ϕ et ψ nous pouvons écrire $d = p^n d_{\mathrm{s}}$ et $d = p^{n'} d'_{\mathrm{s}}$.

Soit k le nombre de boules fermées $B^{(l)}$ conjuguées à B, alors d'après la proposition 3.10 nous avons les égalités $d_{\mathrm{s}} = kc$ et $d'_{\mathrm{s}} = kc'$ où c et c' sont respectivement le nombre de racines de ϕ et de ψ appartenant à une boule $B^{(l)}$. Nous en déduisons l'égalité

$$p^n c \ = \ p^{n'} c' \ = \ d/k \ ,$$

et d'après le corollaire 3.11 nous trouvons $\mu(\phi) = \mu(\psi)$. Le théorème est alors une conséquence de la proposition 2.9. □

Soit a appartenant à $\bar{K}$, alors pour tout δ dans $\Gamma_{\bar{\nu}}$ nous pouvons définir l'entier $\rho_a(\delta)$ par

$$\rho_a(\delta) \ = \ \deg_K(B(a,\delta)) \ .$$

Nous avons ainsi une application croissante ρ_a de $\Gamma_{\bar{\nu}}$ dans $\mathbb{N}$ majorée par $d = \deg_K(a)$. De plus la valeur de ρ_a sur $\{\delta' \in \Gamma_{\bar{\nu}} / \delta' \leq \delta\}$ ne dépend pas de a mais uniquement de la boule $B = B(a,\delta)$, en effet si b appartient à B alors pour tout $\delta' \leq \delta$ nous avons encore $B(a,\delta') = B(b,\delta')$.

Pour tout $e \in \mathbb{N}$, avec $e \leq d$ nous définissons l'ensemble

$$R_a(e) \ = \ \{\delta' \in \Gamma_{\bar{\nu}} \ / \ \rho_a(\delta') \leq e\} \ .$$

Nous considérons une valuation bien spécifiée $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ associée à la boule fermée B, sa restriction μ à $K[x]$ et a dans B tel que ϕ le polynôme irréductible de a sur K définisse la valuation μ. D'après ce qui précède le degré d de ϕ est égal à $\deg_K(B)$, et soient δ et γ tels que nous ayons $B = B(a,\delta)$ et $\mu(\phi) = \gamma$.

Supposons que l'ensemble $R_a(d-1)$ a un plus grand élément δ_1 et soit $d_1 = \rho_a(\delta_1)$, alors pour tout $\delta' \leq \delta_1$ nous avons $\rho_a(\delta') \leq d_1$ et pour tout $\delta' > \delta_1$ nous avons $\rho_a(\delta') = d$. Nous posons $B_1 = B(a, \delta_1)$ et nous choisissons $a_1 \in B_1$ avec $\deg_K(a_1) = d_1$.

Nous appelons $\bar{\mu}_1$ la valuation de $\bar{K}[x]$ associée à la boule B_1, μ_1 sa restriction à $K[x]$ qui est définie par ϕ_1 le polynôme irréductible de a_1 sur K.

Proposition 4.3. *Le polynôme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1 et la valuation μ est la valuation augmentée $[\mu_1\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$.*

Preuve. La valuation μ_1 vérifie $\mu_1 \leq \mu$ et nous pouvons considérer l'ensemble

$$\tilde{\Phi}_\mu(\mu_1) \ = \ \{f \in K[x] \mid \mu_1(f) < \mu(f)\} \ ,$$

cet ensemble est non vide car ϕ vérifie $\mu_1(\phi) < \mu(\phi)$. En effet si nous écrivons

$$\phi = \prod_{i=1}^{d_s} (x - b_i)^{p^n} \ ,$$

avec $b_1 = a$ nous avons $\bar{\mu}_1(x - b_i) \leq \bar{\mu}(x - b_i)$ pour tout $i \geq 2$ et $\bar{\mu}_1(x - a) < \bar{\mu}(x - a)$.

Nous appelons d' le degré minimal d'un polynôme appartenant à $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_1)$ et nous considérons l'ensemble

$$\Phi_\mu(\mu_1) \ = \ \{\psi \in K[x] \mid \mu_1(\psi) < \mu(\psi) \ , \ \deg\psi = d' \text{ et } \psi \text{ unitaire}\} \ .$$

Soit ψ dans $\Phi_\mu(\mu_1)$, alors par construction nous avons $d_1 \leq \deg\psi \leq d$, et d'après [Va 1], théorème 1.15, nous savons que ψ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1 et que la valuation augmentée $\mu' = [\mu_1\ ;\ \mu'(\psi) = \gamma']$, avec $\gamma' = \mu(\psi)$ vérifie $\mu_1 \leq \mu' \leq \mu$.

Nous déduisons du théorème 3.14 qu'il existe un prolongement $\bar{\mu}'$ de la valuation μ' à $\bar{K}[x]$ vérifiant $\bar{\mu}_1 \leq \bar{\mu}' \leq \bar{\mu}$. Soit B' la boule associée à $\bar{\mu}'$, nous avons alors $B \subset B' \subset B_1$, en particulier il existe δ' tel que $B' = B(a, \delta')$ et comme la valuation μ' est différente de μ_1 nous avons $\delta' > \delta_1$. Par conséquent nous avons $\deg\psi = \deg\phi$, le polynôme ϕ appartient à l'ensemble $\Phi_\mu(\mu_1)$ et est donc un polynôme-clé pour la valuation μ_1.

$\square$

Supposons maintenant que l'ensemble $R_a(d-1)$ n'a pas de plus grand élément, il existe alors δ_1 dans $R_a(d-1)$ tel que pour tout δ' appartenant à $R_a(d-1)$ avec $\delta' \geq \delta_1$ nous ayons $\rho_a(\delta') = \rho_a(\delta_1) = d_1$, et comme précédemment nous posons $B_1 = B(a, \delta_1)$ et nous choisissons $a_1 \in B_1$ avec $\deg_K(a_1) = d_1$.

Nous choisissons un sous-ensemble $\{\delta_\alpha\ /\ \alpha \in A\}$ de $\Gamma_{\bar{\nu}}$, indexé par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, avec $\delta_\alpha < \delta_{\alpha'}$ pour $\alpha < \alpha'$ dans A, qui soit cofinal dans l'ensemble $\{\delta' \in R_a(d-1)\ /\ \delta' \geq \delta_1\}$.

Nous appelons $\bar{\mu}_\alpha$ la valuation de $\bar{K}[x]$ associée à la boule $B_\alpha = B(a, \delta_\alpha)$ et μ_α sa restriction à $K[x]$. Pour tout $\alpha \in A$ nous choisissons a_α dans la boule $B_\alpha = B(a, \delta_\alpha)$ avec $\deg_K(a_\alpha) = d_1$, et nous appelons ϕ_α le polynôme irréductible de a_α sur K.

Proposition 4.4. *La famille de valuations $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est une famille continue de valuations de $K[x]$, le polynôme ϕ est un polynôme-clé limite pour cette famille et la valuation μ est la valuation augmentée limite $\left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi) = \gamma\right]$.*

Preuve. Tous les polynômes ϕ_α sont de même degré et les valuations μ_α vérifient $\mu_\alpha \leq \mu_{\alpha'}$ pour $\alpha \leq \alpha'$, nous en déduisons que la famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ est une famille continue de valuations de $K[x]$.

De façon analogue à la démonstration de la proposition 4.3 nous considérons l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) \ = \ \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_{\alpha'}(f) \text{ pour tout } \alpha < \alpha' \text{ dans } A\} \ ,$$

qui est non vide car ϕ y appartient. Si nous appelons $d_{\mathcal{C}}$ le degré minimal d'un polynôme dans $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, par construction nous avons $d_{\mathcal{C}} = d = \deg\phi$, c'est-à-dire que ϕ appartient à l'ensemble

$$\Phi(\mathcal{C}) \ = \ \{\psi \in \tilde{\Phi}(\mathcal{C}) \ , \psi \text{ unitaire et } \deg\psi = d_{\mathcal{C}}\} \ ,$$

et nous déduisons de la proposition 1.21 de [Va 1] que ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$ et que la valuation μ est la valuation augmentée limite $\big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\big]$.

□

Remarque 4.5. *Grâce au corollaire 3.20 nous pouvons associer à toute valuation bien spécifiée $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ une famille de valuations $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = \big(\bar{\mu}_i\big)_{i \in I}$ vérifiant :*

1. *la famille $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$ est une famille associée à la valuation μ de $K[x]$, où nous notons respectivement μ et μ_i la valuation de $K[x]$ restriction de la valuation $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}_i$;*
2. *pour tout $i \leq j$ dans I nous avons $\bar{\mu}_i \leq \bar{\mu}_j$, ce qui est équivalent à $B_j \subset B_i$, où nous appelons B_i la boule fermée de $\bar{K}$ associée à la valuation $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$.*

Nous avons construit cette famille à partir de la construction de la famille $\mathcal{A}$ associée à la valuation μ, et la famille $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$ est construite en *suivant un ordre croissant*, c'est-à-dire que pour déterminer la valuation μ_i nous avons besoin de connaître les valuations μ_j pour $j < i$, plus précisément nous considérons les ensembles $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_j) \ = \ \{f \in K[x] \mid \mu_j(f) < \mu(f)\}$.

Nous pouvons utiliser les résultats précédents pour construire la famille $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = \big(\bar{\mu}_i\big)_{i \in I}$ en *suivant un ordre décroissant*, c'est-à-dire en construisant la valuation $\bar{\mu}_i$ à partir des valuations μ_j pour $j > i$.

Théorème 4.6. *Soit $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\bar{K}[x]$, alors il existe une famille $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = \big(\bar{\mu}_i\big)_{i \in I}$ de valuations de $\bar{K}[x]$ vérifiant les propriétés (1) et (2) de la remarque 4.5 obtenue de la façon suivante.*

D'après la propriété (2) les boules B_i associées aux valuations $\bar{\mu}_i$ sont de la forme $B_i = B(a, \delta_i)$ avec une famille $\big(\delta_i\big)_{i \in I}$ décroissante. Si nous connaissons la valuation $\bar{\mu}_i$ de la famille, les valuations $\bar{\mu}_j$ pour $j < i$ sont déterminées en considérant l'ensemble

$$R_K(\bar{\mu}_i) \ = \ \big\{\delta \ / \ \deg_K(B(a,\delta)) < \deg_K(B(a,\delta_i))\big\} \ .$$

Si cet ensemble a un plus grand élément δ_{i-1} nous construisons la valuation $\bar{\mu}_{i-1}$ comme la valuation associée à la boule $B(a, \delta_{i-1})$, et $i-1$ est le prédécesseur de i dans I.

Si cet ensemble n'a pas de plus grand élément nous choisissons une famille $(\delta_\alpha)_{\alpha \in A}$ cofinale dans $R_K(\bar{\mu}_i)$ et nous définissons la famille $(\bar{\mu}_{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_A}$ où la valuation $\bar{\mu}_{i_\alpha}$ est la valuation associée à la boule $B(a, \delta_\alpha)$, et $I_A = (i_\alpha)_{\alpha \in A}$ est la sous-famille de I sans plus grand élément cofinale dans $\{j \in I / j < i\}$.

Nous nous arrêtons, c'est-à-dire nous trouvons la première valuation $\bar{\mu}_1$ de la famille quand nous trouvons un ensemble $R_K(\bar{\mu}_i)$ tel que $\deg_K(B(a,\delta)) = 1$, où $\delta = \delta_{i-1}$ ou $\delta = \delta_\alpha$, avec les notations précédentes.

Preuve. C'est une conséquence immédiate des propositions 4.3 et 4.4.

□

Annexe A. Suites pseudo-convergentes et extension immédiate

Dans cette partie nous allons montrer comment il est possible d'interpréter les résultats de Kaplansky sur les familles pseudo-convergentes et les extensions immédiates ([Ka]) à partir des notions de familles admissibles continues et de valuations augmentées limites.

Soit $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ une famille continue de valuations, nous notons respectivement $\left(\phi_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ et $\left(\gamma_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ les familles de polynômes-clés et de valeurs dans Γ associées. Nous pouvons supposer que l'ensemble A a un plus petit élément ϑ_0, nous notons μ la valuation μ_{ϑ_0} et toute valuation μ_α pour $\alpha > \vartheta_0$ est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, et nous notons d le degré des polynômes ϕ_α. Rappelons le résultat suivant qui décrit le comportement des valeurs $\mu_\alpha(f)$ pour un polynôme f de $K[x]$ quand α parcourt l'ensemble A, et qui est une conséquence directe du théorème 1.19 de [Va 1].

Théorème A.1. *Soit f dans $K[x]$ de degré m, il existe un entier $v = v_{\mathcal{C}}(f)$ vérifiant $0 \leq v \leq k = [m/d]$, une famille $\left(\alpha_i\right)_{0\leq i\leq j}$ dans A avec $\vartheta_0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_j$ et δ dans Γ, où $j = k - v$, tels que*

$$\mu_\alpha(f) \ = \ \delta + \sum_{i=1}^{j} Inf(\gamma_\alpha, \gamma_{\alpha_i}) + v\gamma_\alpha\ .$$

En particulier f appartient à l'ensemble $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall \alpha < \beta \in A\}$ si et seulement si $v_{\mathcal{C}}(f) > 0$.

Corollaire A.2. *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} \mu_{.}(f): & A & \longrightarrow & \Gamma \\ & \alpha & \mapsto & \mu_\alpha(f) \end{array}$$

est linéaire par morceaux et concave.

Plus précisément nous avons

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(f) \ &= \ \delta_i + (k+1-i)\gamma_\alpha \quad \textit{pour} \quad \alpha_{i-1} \leq \alpha \leq \alpha_i\ , 1 \leq i \leq j\ , \\ \mu_\alpha(f) \ &= \ \delta_{j+1} + (k-j)\gamma_\alpha \quad \textit{pour} \quad \alpha \geq \alpha_j\ , \end{aligned}$$

où $\delta_i = \delta + \sum_{l=1}^{i-1} \gamma_l$.

Soit f dans $K[x]$ et pour tout α nous considérons la division euclidienne de f par ϕ_α que nous notons $f = q_\alpha\phi_\alpha + r_\alpha$. Comme le polynôme ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α pour tout $\beta \geq \alpha$, d'après le lemme 1.1 de [Va 1], nous avons l'inégalité :

$$\mu(r_\beta) = \mu_\alpha(r_\beta) \geq \mu_\alpha(f)\ ,$$

avec l'inégalité stricte si et seulement si f est μ_α-divisible par ϕ_β.

Théorème A.3. *Soit f un polynôme dans $K[x]$ et soit $f = q_\alpha \phi_\alpha + r_\alpha$ la division euclidienne de f par le polynôme-clé ϕ_α :*

(1) si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$, il existe α_1 tel que pour tout $\alpha > \alpha_1$ nous avons

$$\mu_\alpha(f) = \mu(r_\alpha) \ .$$

(2) si f appartient à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons

$$\mu_\alpha(f) \ \leq \ \mu(r_\alpha) \ < \ \mu_\beta(f) \ .$$

Corollaire A.4. *(1) Si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons $\mu(r_\beta) = \mu(r_\alpha)$.*

(2) Si f appartient à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons $\mu(r_\beta) > \mu(r_\alpha)$.

Preuve du théorème. Si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta \geq \alpha \geq \alpha_1$ nous avons l'égalité $\mu_\beta(f) = \mu_\alpha(f)$, et de plus le polynôme f n'est pas μ_α-divisible par ϕ_β, d'où l'égalité $\mu(r_\beta) = \mu_\alpha(f)$.

Si f appartient à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$, nous déduisons du corollaire A.2 qu'il existe $\alpha_{[f]}$ dans A, $\delta_{[f]}$ dans Γ et un entier $v_{[f]} \geq 1$ tels que pour tout $\beta \geq \alpha_{[f]}$ nous ayons l'égalité $\mu_\beta(f) = \delta_{[f]} + v_{[f]}\gamma_\beta$.

Pour tout $\beta \leq \alpha$, le polynôme ϕ_α est un polynôme-clé pour la valuation μ_β, par conséquent nous avons $\mu_\beta(f) \leq \mu(r_\alpha)$, de plus pour $\beta < \alpha$ nous avons l'inégalité $\mu_\beta(f) < \mu_\alpha(f)$, par conséquent f est μ_β-divisible par ϕ_α d'où l'inégalité $\mu(r_\alpha) > \mu_\beta(f)$. Nous en déduisons que pour tout β avec $\alpha_{[f]} < \beta < \alpha$ nous avons $\mu_\beta(q_\alpha) = \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\beta$. Nous déduisons du corollaire A.2 que nous avons $\mu_\beta(q_\alpha) \leq \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\beta$ pour tout $\beta > \alpha_{[f]}$, par conséquent pour tout $\beta > \alpha$ nous avons l'inégalité stricte

$$\mu_\beta(q_\alpha\phi_\alpha) \ \leq \ \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\beta + \gamma_\alpha \ < \ \delta_{[f]} + v_{[f]}\gamma_\beta \ = \ \mu_\beta(f) \ ,$$

et nous en déduisons $\mu_\beta(f) > \mu(r_\alpha)$.

□

Corollaire A.5. *Si le groupe des valeurs Γ ne possède de pas de plus petit élément strictement positif, c'est-à-dire si le sous-groupe isolé minimal de Γ n'est pas discret, il existe α_1 tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_1$ nous avons*

$$\mu_\alpha(f) = \mu(r_\alpha) \ .$$

Preuve. Grâce au lemme 1.17 de [Va 1] nous pouvons choisir la famille $\mathcal{C}$ de telle façon que toute valeur de Γ supérieure à $\mu_\alpha(f)$ soit atteinte par $\mu_\beta(f)$, pour un β dans A. Par conséquent si Γ ne possède de pas de plus petit élément strictement positif nous déduisons le résultat des inégalités $\mu_\beta(f) > \mu(r_\alpha) \geq \mu_\alpha(f)$.

□

Nous avons vu qu'il est équivalent de se donner une famille pseudo-convergente $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'éléments de K et de se donner une famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de valuations de $K[x]$ telle que les polynômes ϕ_α qui la définissent sont de degré un, c'est-à-dire sont de la forme $\phi_\alpha = x - a_\alpha$

(cf. proposition 2.10). Dans ce cas pour tout polynôme f de $K[x]$ le reste de la division de f par le polynôme-clé $\phi_\alpha = x - a_\alpha$ est égal à $f(a_\alpha)$.

Nous déduisons alors de ce qui précède le résultat suivant.

Corollaire A.6. *Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille pseudo-convergente d'éléments de K, et soit f un polynôme de $K[x]$, alors il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons :*

(1) si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, alors $\nu(f(a_\beta)) = \nu(f(a_\alpha))$,

(2) si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, alors $\nu(f(a_\beta)) > \nu(f(a_\alpha))$.

Nous considérons maintenant un corps valué (K,ν) et nous voulons étudier ses extensions immédiates, c'est-à-dire les extensions de corps valués $(L,\nu_L)/(K,\nu)$ telles que les extensions de groupes $\Gamma_{\nu_L}/\Gamma_\nu$ et les extensions résiduelles $\kappa_{\nu_L}/\kappa_\nu$ soient triviales.

Nous remarquons d'abord que d'après la proposition 2.5 si μ est une valuation bien spécifiée de $K(x)$ vérifiant $\Gamma_\nu = \Gamma_\mu$ l'extension résiduelle κ_μ/κ_ν est de degré de transcendance un, en particulier n'est pas triviale. Par conséquent les extensions monogènes immédiates (L,ν_L) de (K,ν) sont définies soit par des pseudo-valuations, c'est le cas d'une extension algébrique L de K, soit par une valuation de $K[x]$ qui n'est pas bien spécifiée, c'est le cas $L = K(x)$.

Proposition A.7. *Si (L,ν_L) est une extension immédiate monogène de (K,ν), la famille admise $\mathcal{A}$ associée à la valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ définie par ν_L est de la forme suivante :*

(1) si L est une extension transcendante pure, $L = K(x)$, la famille $\mathcal{A}$ est une famille admissible continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ telle que les polynômes ϕ_α sont de degré un et telle que l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est vide ;

(2) si L est une extension algébrique, $L = K(a) \simeq K[x]/(\phi)$ avec ϕ polynôme irréductible de a sur K, la famille $\mathcal{A}$ est composée d'une famille admissible continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ telle que les polynômes ϕ_α sont de degré un et de la pseudo-valuation μ, où μ est obtenue comme valuation augmentée-limite de la famille $\mathcal{C}$ associée au polynôme-clé limite ϕ.

Preuve. Si la famille $\mathcal{A}$ associée à la valuation, ou pseudo-valuation μ contient un couple de valuations successives (μ_{i-1},μ_i), c'est-à-dire telle que la valuation μ_i est obtenue comme valuation augmentée $\mu_i = [\mu_{i-1}\ ;\ \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$, nous déduisons de la proposition 2.5 et de la démonstration de la proposition 2.9 de [Va 4] que nous avons l'inégalité

$$e(\nu_L/\nu)f(\nu_L/\nu) \geq \deg\phi_i/\deg\phi_{i-1}\ ,$$

où nous notons respectivement $e(\nu_L/\nu)$ et $f(\nu_L/\nu)$ l'indice de ramification et le degré de l'extension résiduelle de $(L,\nu_L = /(K,\nu)$, et où ϕ_{i-1} et ϕ_i sont les polynômes définissant les valuations μ_{i-1} et μ_i.

En particulier si l'extension $(L,\nu_L)/(K,\nu)$ est immédiate nous en déduisons que pour tout couple de valuations successives (μ_{i-1},μ_i) de la famille $\mathcal{A}$ nous avons l'égalité $\deg\phi_i = \deg\phi_{i-1}$, par conséquent que la famille ne contient pas de partie discrète .

Dans le cas où la valuation μ n'est pas bien spécifiée, la famille admise $\mathcal{A}$ associée à μ est ouverte, elle est constituée d'une seule famille simple $\mathcal{S}$ qui est de la forme $\mathcal{S} = \big((\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\big)$, avec $\tilde{\Phi}\big((\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\big) = \emptyset$ (cf. remarque 1.3), et de plus nous déduisons de ce qui précède que tous les polynômes-clés ϕ_α sont de degré un.

Dans le cas où la valuation μ est bien spécifiée, μ est une pseudo-valuation obtenue comme valuation augmentée limite de la famille continue $\mathcal{S} = \big((\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\big)$, telle que les polynômes-clés ϕ_α sont de degré un, $\mu = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi) = +\infty\big]$.

□

Proposition A.8. *Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ la famille admissible continue associée définie à la proposition A.7. Alors un polynôme f n'appartient pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$ si et seulement si il existe α dans A tel que nous ayons $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$.*

Preuve. Si le polynôme f n'appartient pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$ il existe α dans A tel que pour tout $\beta \geq \alpha$ nous ayons $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f) = \nu_L(f)$, c'est-à-dire tels que f n'est pas μ_α-divisible par ϕ_β. Par conséquent d'après le corollaire A.6, nous avons pour tout $\beta \geq \alpha$ l'égalité $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$.

□

Nous pouvons déduire de ce qui précède les résultats suivants, qui sont des reformulations des théorèmes 2 et 3 de [Ka].

Corollaire A.9. *Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $\big(a_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ la famille pseudo-convergente associée, alors l'extension L/K est transcendante si et seulement si pour tout f dans $K[x]$ il existe α dans A tel que nous ayons $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$.*

Preuve. Nous sommes dans le cas d'une extension transcendante si et seulement si l'ensemble $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$ est vide, c'est-à-dire si et seulement si pour tout f dans $K[x]$ il existe α dans A tel que nous ayons $\mu_\beta(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$.

□

Corollaire A.10. *Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $\big(a_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ la famille pseudo-convergente associée, et nous supposons que l'extension L/K est algébrique. Alors si ϕ est un polynôme vérifiant $\nu(f(a_\beta)) > \nu(f(a_\alpha))$ de degré minimal, l'extension L est l'extension $L = K(z)$ où z est une racine du polynôme ϕ.*

De plus pour tout y dans L il existe $r(x)$ dans $K[x]$ avec $\deg r < \deg\phi$ tel que $y = r(z)$ et la valuation ν_L est définie par $\nu_L(y) = \nu(r(a_\alpha))$ pour α assez grand.

Preuve. Nous sommes dans le cas d'une extension algébrique si et seulement si l'ensemble $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$ est non vide, tout polynôme unitaire ϕ de degré minimal dans $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$ est un polynôme-clé limite pour la famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ et la pseudo-valuation augmentée limite μ de $K[x]$ définie par $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi) = +\infty\big]$ induit une valuation ν_L de l'extension $L = K[x]/(\phi)$ telle que l'extension est immédiate.

De plus tout élément y de L est défini par un polynôme r de degré strictement inférieur au degré de ϕ, par conséquent r n'appartient pas à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$ et nous trouvons $\nu_L(y) = \mu(r) = \mu_\alpha(r)$ pour α assez grand.

□

Références

[A-P 1] V. Alexandru and N. Popescu : Sur une classe de prolongements à $K(X)$ d'une valuation sur un corps K. Rev. Roum. Math. Pures Appl. **33** (1988), 393-400.

[Ka] I. Kaplansky, Maximal Fields with Valuation, Duke Math. J. **9**, (1942), 303-321.

[Le 1] Lê D.T. : La monodromie n'a pas de points fixes, J. of Fac. Sc., Univ. Tokyo, Sec. 1A, vol. 22 (1975), 409-427.

[Le 2] Lê D.T. : The geometry of the monodromy theorem. in C.P. Ramanujam - A Tribute, Tata Institute, Springer Verlag (1979), 191-208.

[McL 1] S. MacLane : A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.

[McL 2] S. MacLane : A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.

[Na] M. Nagata : A theorem on valuation rings and its applications. Nagoya Math. J. **29** (1967), 85-91.

[Oh] J.Ohm : The ruled residue theorem for simple transcendental extensions of valued fields. Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 16-18.

[Os] A. Ostrowski, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Z. **39**, (1935), 269-404.

[Va 1] M. Vaquié : Extension d'une valuation. Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 3439-3481.

[Va 2] M. Vaquié : Famille admise associée à une valuation de $K[x]$, Sem. et Congr. **10** (2005), 391-428.

[Va 3] M. Vaquié : Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$. Adv. Stud. in Pur. Math. **46** (2007), 259-271.

[Va 4] M. Vaquié : Famille admise de valuations et défaut d'une extension. Jour. Alg. **311** (2007), 859-876.

[Va 5] M. Vaquié : Extension de valuation et polygone de Newton. Ann. Inst. Fourier **58** (2008), 2503-2541.

[Va 6] M. Vaquié : Famille admise associé à une valuation de $K(X)$. Bull. London Math. Soc. (à paraître).

Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219, CNRS, Université de Toulouse, UPS, 118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France

Email address: `vaquie@math.univ-toulouse.fr`