Défaut *

Michel Vaquié

Abstract

Cela permet de définir les sauts d'une famille admissible, ceux ci corespondant aux différentes valuations augmentés limites apparaissant dans la famille. Nous en déduisons, pour toute valuation μ d'une extension monogène finie $L = K(\theta)$ prolongeant une valuation ν de K, la relation entre le degré de l'extension $[L : K]$ et le produit ef de l'indice de ramification $e = [\Gamma_\mu : \Gamma_\nu]$ par le degré résiduel $f = [\kappa_\mu : \kappa_\nu]$.

Introduction

1 Sauts d'une famille admissible

Nous considérons un corps K muni d'une valuation ν, nous supposons que le rang de la valuation ν est fini, égal à r, et nous choisissons un plongement du groupe des valeurs Γ_ν dans un groupe totalement ordonné $\bar{\Gamma}$ isomorphe à $(\mathbb{R}^s, +)_{\text{lex}}$, avec $s \geq r + 1$. Toutes les valeurs finies γ que nous considèrerons seront alors dans $\bar{\Gamma}$.

Nous appelons $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K[x], \nu)$ l'ensemble des valuations ou pseudo-valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$ dont la restriction à K est égale à ν, et nous appelons $\mathcal{F} = \mathcal{F}(K[x], \nu)$ l'ensemble des *familles admissibles* de valuations de $K[x]$ appartenant à $\mathcal{E}$. Alors, à toute valuation ou pseudo-valuation μ de $\mathcal{E}$ nous pouvons associer une famille *admise* $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}$, que nous notons $\mathcal{A}(\mu)$, nous rappelons que cette famille n'est pas unique mais définie à équivalence près. La famille $\mathcal{A}$ est une famille admissible, c'est-à-dire est réunion de familles *admissibles simples* $\mathcal{S}^{(j)}$, pour j parcourant J, avec $J = \{1, \ldots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, chaque famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$étant constituée d'une partie *discrète* $\mathcal{D}^{(j)}$ et d'une partie *continue* $\mathcal{C}^{(j)}$, la dernière famille continue $\mathcal{C}^{(N)}$ pouvant être éventuellement vide.

Nous pouvons écrire la famille $\mathcal{A}$ sous la forme $\mathcal{A} = \big(\mu_l\big)_{l \in I}$, où I est un ensemble totalement ordonné, chaque valuation μ_l étant définie soit comme *valuation augmentée*, soit comme *valuation augmentée limite*. Dans le premier cas nous avons

$$\mu_l \ = \ [\mu_{l-1} \ ; \ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l] \ ,$$

et ϕ_l est un *polynôme-clé* définissant la valuation μ_l à partir de la valuation μ_{l-1}, et dans le deuxième cas nous avons

$$\mu_l \ = \ \left[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l \ \right] \ ,$$

et ϕ_l est un *polynôme-clé limite* définissant la valuation μ_l à partir de la famille continue $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$.

Nous notons respectivement $\big(\phi_l\big)_{l \in I}$ et $\big(\gamma_l\big)_{l \in I}$ les familles de polynômes et de valeurs associées à $\mathcal{A}$. Nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *complète* si l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{l}$, dans ce cas la valuation μ est la valuation $\mu_{\bar{l}}$, sinon nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *ouverte* et dans ce cas la valuation μ n'appartient pas à la famille $\mathcal{A}$. Quand la famille $\mathcal{A}$ associée à une valuation μ est complète, nous disons que la valuation μ est *bien définie*, dans ce cas le polynôme-clé ou polynôme-clé limite $\phi_{\bar{l}}$ qui définit la valuation μ comme valuation augmentée ou comme valuation

*2000 Mathematics Subject Classification: 13A18 (12J10 14E15) augmentée limite est appelé le polynôme *définissant* μ. Dans le cas où l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{l}$, nous définissons I^* comme I privé de $\bar{l}$, sinon nous posons $I^* = I$, et nous définissons la sous-famille $\mathcal{A}^* = \big(\mu_l\big)_{l\in I^*}$.

La première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A}$ est obtenue à partir de la valuation ν de K grâce à un polynôme ϕ_1 unitaire de degré un et à une valeur γ_1. Nous considèrerons parfois que la valuation $\nu = \mu_0$ appartient à la famille $\mathcal{A}$ et par abus de notation nous considèrerons que 0 est le plus petit élément de l'ensemble I. La valuation μ_1 est ainsi considérée comme une valuation augmentée, définie par le polynôme ϕ_1.

Si μ et μ' sont deux valuations appartenant à la même sous-famille simple $\mathcal{S}$ d'une famille admissible $\mathcal{A}$ telles que μ' est obtenue comme valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi') = \gamma']$, nous disons que (μ, μ') forment *un couple de valuations successives* de la famille $\mathcal{A}$.

Nous renvoyons le lecteur aux articles [Va 1], [Va 2] et [Va 3] de l'auteur pour des définitions précises et pour les propriétés de ces valuations, de ces polynômes et de ces familles.

Nous appelons Γ_{μ_l} le groupe des ordres de la valuation μ_l, alors pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives de $\mathcal{A}$ nous avons $\Gamma_{\mu_l} = \Gamma_{\mu_k} \oplus \mathbb{Z}\gamma_l$, d'où l'égalité

$$[\Gamma_l : \Gamma_k] \ = \ \tau_l$$

où τ_l est le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_l$ appartienne à Γ_{μ_k} si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et où τ_l est $+\infty$ sinon.

Pour toute valuation μ de $K[x]$, nous notons $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ l'algèbre graduée associée et nous notons Δ_μ sa composante $\big(\mathrm{gr}_\mu K[x]\big)_0$ de degré 0. Rappelons que si μ' est une valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$ ou une valuation augmentée limite $\mu' = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma\big]$, nous pouvons déterminer l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ associée à la valuation μ' à partir de celle associée à la valuation μ, ou à celles associées aux valuations μ_α ([Va 1] Théorème 1.7 et Théorème 1.26).

Plus précisément si μ' est une valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$, l'application naturelle g de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ induit un isomorphisme

$$G\colon \big(\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))\big)[T] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu'} K[x]\ ,$$

qui envoie T sur $G(T) = H_{\mu'}(\phi)$.

Nous rappelons les hypothèses 1 et 2 introduites par MacLane (cf. [McL 1], [Va 1]).

Hypothèse 1 pour la valuation μ et le polynôme ϕ : Il existe q et q' dans $K[x]$ vérifiant qq' μ-équivalent à 1 et $\mu(q) = -\mu(q') = \mu(\phi)$.

Hypothèse 2 pour le couple de valuations (μ, μ') : Supposons que γ appartienne à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et appelons τ le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma \in \Gamma_\mu$, alors il existe p et $p' = p'(\tau\gamma)$ dans $K[x]$ vérifiant pp' μ'-équivalent à 1 et $\mu'(p) = \mu(p) = -\mu'(p') = -\mu(p') = \tau\gamma$.

Si nous supposons que l'hypothèse 1 est vérifiée, alors le noyau de la composante de degré 0 $g_0\colon \Delta_\mu \to \Delta_{\mu'}$ est l'idéal engendré par $\varphi = H_\mu(q'\phi)$, et nous avons:

- si γ n'appartient pas à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\big(\Delta_\mu/(\varphi)\big) \ \xrightarrow{\ \sim\ }\ \Delta_{\mu'}\ ,$$

- si γ appartient à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et si l'hypothèse 2 est vérifiée

$$\big(\Delta_\mu/(\varphi)\big)[S] \ \xrightarrow{\ \sim\ }\ \Delta_{\mu'}\ ,$$

avec $S = H_{\mu'}\big(p'(\tau\gamma)\phi^\tau\big)$ (cf. [Va 1] Remarque 1.5).

Si μ' est la valuation augmentée limite $\mu' = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma\big]$ d'une famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, nous définissons l'algèbre graduée $\mathbf{gr_A} = \mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta))$ qui ne dépend pas du couple $\alpha < \beta$ dans A, et l'application naturelle de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ induit un isomorphisme d'algèbres graduées:

$$Q\colon \mathbf{gr_A}[T] \ \xrightarrow{\ \sim\ }\ \mathrm{gr}_{\mu'} K[x]\ ,$$

qui envoie T sur $Q(T) = H_{\mu'}(\phi)$.

Tous les groupes de valuation Γ_{μ_α} sont égaux et nous notons ce groupe $\mathbf{\Gamma_A}$, nous pouvons alors introduire l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3 pour la famille $\mathcal{C}$: Pour tout γ dans $\mathbf{\Gamma_A}$ il existe p et $p' = p'(\gamma)$ dans $K[x]$ vérifiant $pp'(\gamma) \underset{\mu_\theta}{\sim} 1$ et $\mu_\theta(p) = -\mu_\theta(p'(\gamma)) = \gamma$, où θ est le plus petit élément de l'ensemble A.

Si nous supposons que la famille $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse 3, alors le morphisme Q induit un isomorphisme en degré 0:

- si γ n'appartient pas à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0 \colon \mathbf{\Delta_A} \ \xrightarrow{\sim} \ \Delta_{\mu'} \ ,$$

- si γ appartient à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0 \colon \mathbf{\Delta_A}[S] \ \xrightarrow{\sim} \ \Delta_{\mu'} \ ,$$

qui envoie S sur $H_{\mu'}(p'\phi^\tau)$, où nous appelons τ le plus petit entier positif t tel que $t\gamma$ appartienne à $\mathbf{\Gamma_A}$ et où nous supposons qu'il existe p et $p'(\tau\gamma) = p'$ dans $K[x]$ tels que pp' soit μ_α-équivalent à 1 pour α suffisamment grand et tels que $\mu_\alpha(p') = -\tau\gamma$ (cf. [Va 3] Proposition 1.7).

Nous déduisons de la proposition 1.5 de [Va 3] que les hypothèses 1, 2 et 3 sont vérifiées pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives et pour chacune des familles continues $\mathcal{C}^{(j)}$ apparaissant dans $\mathcal{A}$, et nous pouvons trouver:

- q'_k dans $K[x]$ tel que $H_{\mu_k}(q'_k)$ soit inversible dans $\mathrm{gr}_{\mu_k} K[x]$ et tel que $\mu_k(q'_k \phi_l) = 0$;
- p'_l dans $K[x]$ tel que $H_{\mu_l}(p'_l)$ soit inversible dans $\mathrm{gr}_{\mu_l} K[x]$ et tel que $\mu_k\big(p'_l {\phi_l}^{\tau_l}\big) = 0$.

De plus si la valuation μ_l n'est pas la dernière valuation de la famille $\mathcal{A}$, il existe toujours une valuation μ_m dans $\mathcal{A}$ telle que (μ_l, μ_m) soit un couple de valuations successives, et le polynôme-clé ϕ_m est de la forme $\phi_m = {\phi_l}^{r_l} + \ldots + g_0$, avec $r_l \gamma_l \in \Gamma_k$. Nous définissons alors l'entier s_l par $r_l = \tau_l s_l$.

Si μ_k est la première valuation d'une sous-famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}$ de $\mathcal{A}$, et n'est pas la dernière valuation de $\mathcal{A}$, nous pouvons encore définir les nombres τ_k et s_k grâce à la proposition 1.4 de [Va 3].

Remarque 1.1. Les entiers τ_l et s_l, ainsi que les polynômes q'_k et p'_l sont bien définis, c'est-à-dire qu'ils ne dépendent que de la valuation μ_l ou de la valuation μ_k et non du couple de valuations successives. En effet si la valuation μ_l appartient à la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ d'une sous-famille simple de $\mathcal{A}$, le couple (μ_k, μ_l) est déterminé entièrement par μ_l, et si la valuation μ_l appartient à la partie continue $\mathcal{C}^{(j)}$ d'une sous-famille simple, nous avons $\mu_k(\phi_l) = \gamma_k$ et $\tau_l = s_l = 1$.

Pour tout $j \geq 2$, la première valuation $\mu_1^{(j)}$ de la sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ n'apparaît pas comme valuation augmentée, par conséquent n'est jamais le deuxième terme d'un couple (μ_k, μ_l) de valuations successives. Par contre $\mu_1^{(j)}$ est obtenue comme valuation augmentée limite de la sous-famille continue $\mathcal{C}^{(j-1)} = \left(\mu_\alpha^{(j-1)}\right)_{\alpha \in A^{(j-1)}}$ de la sous-famille simple précédente.

Proposition 1.1. *Il existe une famille croissante de corps $\big(F_k\big)_{k \in I^*}$, avec F_0 égal au corps résiduel κ_ν de la valuation ν de K, telle que pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives de $\mathcal{A}$ nous ayons:*

- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu_l} \ = \ F_k[S_l] \ , \quad \textit{avec } S_l = H_{\mu_l}\big(p'_l \phi_l^{\tau_l}\big) \ ;$$

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu_l} \ = \ F_k \ .$$

De plus si l appartient à I^*, F_l est un extension finie de F_k de degré s_l.

Preuve. La proposition est une généralisation du résultat de MacLane (cf. [McL 1] Theorem 12.1 et [Va 1] Théorème 1.12) et se démontre par récurrence. En effet si nous savons que Δ_k est de la forme $F[S_k]$ avec F corps et $S = H_{\mu_k}\big(p'_k \phi_k^{\tau_k}\big)$, alors nous trouvons que pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives, Δ_{μ_l} est égal à $F_k[S_l]$ où F_k est le corps $F[S_k]/(\varphi_l)$ où φ_l est un polynôme de degré s_l en S_k défini par $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_k \phi_l)$.

Il suffit donc de montrer que pour toute sous-famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}$ de $\mathcal{A}$, la partie homogène $\Delta_{\mu_1^{(j)}}$ de degré 0 de l'algèbre graduée associée à la première valuation $\mu_1^{(j)}$ est un anneau de polynômes $F[S]$ en une variable à coefficients dans un corps F, si $\mu_1^{(j)}$ n'est pas la dernière valuation de la famille $\mathcal{A}$.

Si $\mu_1^{(j)}$ est la première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A}$, c'est-à-dire pour $j = 1$, nous avons Δ_{μ_1} qui est égal à $\kappa_\nu[S_1]$, avec $S_1 = H_{\mu_1}\big(p'_1 {\phi_1}^{\tau_1}\big)$, où $\tau_1 = [\Gamma_{\mu_1} : \Gamma_\nu]$. Si $j \geq 2$ $\Delta_{\mu_1^{(j)}}$ est de la forme $\mathbf{\Delta_A}[S]$ où $\mathbf{\Delta_A}$ est l'anneau associé à la partie continue $\mathcal{C}^{(j-1)}$ de la sous-famille $\mathcal{S}^{(j-1)}$. L'anneau $\mathbf{\Delta_A}$ est isomorphe à $\Delta_{\mu_l}/(\varphi_k)$ où (μ_k, μ_l) est un couple de valuations successives de $\mathcal{A}$ appartenant à $\mathcal{C}^{(j-1)}$, et nous en déduisons par récurrence sur j que c'est bien un corps.

Remarque 1.2. Nous avons montré de plus que si μ_k est la première valuation $\mu_1^{(j)}$ d'une sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, et si nous notons $F_0^{(j)}$ le corps tel que Δ_{μ_k} soit égal à $F_0^{(j)}[S]$, alors F_k est une extension algébrique finie de $F_0^{(j)}$ de degré s_k. En effet nous avons $S = H_{\mu_k}\big(p'_k {\phi_k}^{\tau_k}\big)$ et le corps F_k est égal à $\Delta_{\mu_k}/(\varphi_l)$ où $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_l \phi_l)$ avec $\phi_l = {\phi_k}^{\tau_k s_k} + \ldots + g_0$.

Grâce à la proposition précédente nous pouvons étudier le degré de l'extension F_m/F_k pour deux valuations μ_k et μ_l appartenant à la même sous-famille simple de $\mathcal{A}$. Nous voulons maintenant étudier ce qui se passe quand nous considérons deux valuations n'appartenant pas à la même sous-famille simple.

Soit $\mathcal{A} = \big(\mu_l\big)_{l \in I}$ une famille admissible de valuations de $K[x]$, réunion des sous-familles simples $\mathcal{S}^{(j)} = \big(\mu_1^{(j)}, \ldots, \mu_{n_j}^{(j)}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha \in A^{(j)}}\big)$, pour j parcourant J. Pour toute valuation $\mu_k^{(j)}$ de la sous-famille $\mathcal{S}^{(j)}$ nous notons $\Gamma_k^{(j)}$, $F_k^{(j)}$, $s_k^{(j)}$, $r_k^{(j)}$ et $\tau_k^{(j)}$ respectivement le groupe des valeurs, le corps et les entiers définis précédemment associés à la valuation.

Nous définissons aussi le groupe $\Gamma_0^{(j)}$ et le corps $F_0^{(j)}$ de la manière suivante. Si $j = 1$, alors nous posons $\Gamma_0^{(j)} = \Gamma_\nu$ et $F_0^{(j)} = \kappa_\nu$, et si $j \geq 2$ nous posons $\Gamma_0^{(j)} = \mathbf{\Gamma_{A^{(j-1)}}}$ groupe des valeurs des valuations $\mu_\alpha^{(j-1)}$ appartenant à la partie continue de la sous-famille simple précédente $\mathcal{S}^{(j-1)}$ et $F_0^{(j)} = \mathbf{\Delta_{A^{(j-1)}}}$ corps associé aux valuations $\mu_\alpha^{(j-1)}$.

Définition. Nous appelons *saut d'ordre* $j-1$ de la famille admissible $\mathcal{A}$ le nombre rationnel $s^{(j-1)}(\mathcal{A}) = s^{(j-1)} > 1$ défini par:

$$\deg \phi_1^{(j)} \;=\; s^{(j-1)}(\mathcal{A}) . \deg \phi_\alpha^{(j-1)} \;,$$

où $\phi_1^{(j)}$ est le polynôme-clé limite définissant la valuation $\mu_1^{(j)}$ et où $\phi_\alpha^{(j-1)}$ est un polynôme-clé associé à la famille continue $\mathcal{C}^{(j-1)}$.

Si la famille admissible $\mathcal{A}$ est d'ordre fini N, c'est-à-dire pour $J = \{1, \ldots, N\}$, nous appelons *saut total* de la famille le nombre rationnel $s^{tot} = s^{tot}(\mathcal{A})$ défini par:

$$s^{tot}(\mathcal{A}) \;=\; \prod_{j=2}^{N} s^{(j-1)}(\mathcal{A}) \;.$$

Remarque 1.3. Si nous supposons que l'ensemble des valeurs $\Lambda^{(j-1)} = \big\{\gamma_\alpha^{(j-1)} \mid \alpha \in A^{(j-1)}\big\}$ admet une borne supérieure, alors nous savons que le développement du polynôme-clé limite $\phi_1^{(j)}$ selon les puissances de $\phi_\alpha^{(j-1)}$ est de la forme $\phi_1^{(j)} = \big(\phi_\alpha^{(j-1)}\big)^s + g_{s-1,\alpha}\big(\phi_\alpha^{(j-1)}\big)^{s-1} + \ldots + g_{0,\alpha}$, pour tout α suffisamment grand dans $A^{(j-1)}$ (cf. [Va 2] Théorème 3.7).

Nous en déduisons que le saut d'ordre $j-1$ est un entier, $s^{(j-1)}(\mathcal{A}) = s$.

Proposition 1.2. *Le degré du polynôme-clé $\phi_k^{(j)}$ associé à la valuation $\mu_k^{(j)}$, avec $1 \leq k \leq n_j$ et $j \in J$, est égal à:*

$$\deg\phi_k^{(j)} \;=\; \big[\Gamma_{k-1}^{(j)} : \Gamma_\nu\big]\big[F_{k-1}^{(j)} : \kappa_\nu\big] \prod_{u=1}^{j-1} s^{(u)} \;.$$

De même le degré du polynôme-clé $\phi_\alpha^{(j)}$ associé à une valuation $\mu_\alpha^{(j)}$, avec $\alpha \in A^{(j)}$ $j \in J$, est égal à:

$$\deg\phi_\alpha^{(j)} \;=\; \big[\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(\mathrm{j})}} : \Gamma_\nu\big]\big[\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^{(\mathrm{j})}} : \kappa_\nu\big] \prod_{u=1}^{j-1} s^{(u)} \;.$$

Preuve. D'après ce qui précède, nous voyons que si $(\mu_k^{(j)}, \mu_l^{(j)})$ est un couple de valuations successives appartenant à la sous-famille $\mathcal{S}^{(j)}$, avec $\mu_k^{(j)}$ dans la partie continue, nous avons l'égalité:

$$\deg\phi_l^{(j)} \;=\; \big[\Gamma_k^{(j)} : \Gamma_{k-1}^{(j)}\big]\big[F_k^{(j)} : F_{k-1}^{(j)}\big]\deg\phi_k^{(j)} \;,$$

où $\Gamma_{k-1}^{(j)}$ et $F_{k-1}^{(j)}$ sont bien définies pour toute valuation $\mu_k^{(j)}$, $1 \leq k \leq n_j$.

Nous en déduisons par récurrence sur k que pour toute valuation $\mu_l^{(j)}$ appartenant à la partie discrète de la sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, nous avons l'égalité:

$$\deg\phi_l^{(j)} \;=\; \big[\Gamma_{l-1}^{(j)} : \Gamma_0^{(j)}\big]\big[F_{l-1}^{(j)} : F_0^{(j)}\big]\deg\phi_1^{(j)} \;,$$

et pour toute valuation $\mu_\alpha^{(j)}$ appartenant à la partie continue de la sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, nous avons l'égalité:

$$\deg\phi_\alpha^{(j)} \;=\; \big[\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(\mathrm{j})}} : \Gamma_0^{(j)}\big]\big[\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^{(\mathrm{j})}} : F_0^{(j)}\big]\deg\phi_1^{(j)} \;.$$

Nous trouvons le résultat en faisant une récurrence sur j, en utilisant les égalités $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(\mathrm{j-1})}} = \Gamma_0^{(j)}$ et $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^{(\mathrm{j-1})}} = F_0^{(j)}$ et la définition des nombres $s^{(u)}$.

Soit L une extension algébrique monogène de K, c'est-à-dire de la forme $L = K(\theta) = K[x]/(P)$, avec $P(x)$ polynôme unitaire de degré $d = [L : K]$. Alors tout prolongement μ à L d'une valuation ν de K correspond à une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ de $K[x]$ dont le socle $\mathcal{P} = \{f \in K[x] \mid \tilde{\mu}(f) = +\infty\}$ est égal à l'idéal (P) de $K[x]$. Nous appelons famille admissible associée à μ la famille admissible associée à la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ et nous la notons $\mathcal{A}(\mu)$.

Nous notons $e(\mu/\nu)$ l'indice de ramification, $e(\mu/\nu) = [\Gamma_\mu : \Gamma_\nu]$, et $f(\mu/\nu)$ le degré de l'extension résiduelle, $f(\mu/\nu) = [\kappa_\mu : \kappa_\nu]$.

Corollaire. *Soit $\mathcal{A}(\mu)$ la famille admissible associée au prolongement μ de la valuation ν de K. Nous avons alors l'égalité:*

$$[L : K] \;=\; e(\mu/\nu) f(\mu/\nu) s^{tot}\big(\mathcal{A}(\mu)\big) \;.$$

En particulier, si μ est l'unique prolongement de ν à L, le défaut de l'extension $(L,\mu)/(K,\nu)$ est égal au saut total de la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$.

Preuve. Si $\tilde{\mu}$ est une pseudo-valuation de $K[x]$ de socle (P), la famille admissible associée $\mathcal{A}$ est complète, et la dernière valuation $\tilde{\mu} = \mu_k^{(j)}$ de $\mathcal{A}$ est une valuation augmentée ou une valuation augmentée limite associée au polynôme $\phi_k^{(j)}$ égal à P et à la valeur $\gamma_k^{(j)}$ égale à $+\infty$.

Il suffit alors de vérifier que nous avons $\Gamma_{k-1}^{(j)} = \Gamma_\mu$ et $F_{k-1}^{(j)} = \kappa_\mu$ pour déduire le résultat de la proposition précédente (cf. [McL 2] Theorem 9.1 et [Va 1] Proposition 2.7 et Proposition 2.8).

2 Polygone de Newton

Soit P un polynôme irréductible séparable unitaire appartenant à $K[x]$, et soit L l'extension algébrique de K définie par P, c'est-à-dire $L = K[x]/(P)$. Si nous choisissons une racine θ de P dans K^{sep}, une cloture séparable de K fixée, alors nous avons L sous-corps de K^{sep} isomorphe au corps $K(\theta)$.

Alors tout prolongement ζ de la valuation ν à l'extension L de K définit une pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ de $K[x]$, de socle $\mathcal{P} = (P)$ et pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons $\tilde{\zeta}(f) = \zeta\big(f(\theta)\big)$. Nous appelons $\mathcal{A}(\zeta) = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ la famille admise de valuations de $K[x]$ associée à la pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$, famille définie à équivalence près.

Nous voulons déterminer l'ensemble $\mathcal{V}$ des valuations ζ de L qui prolongent ν, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations $\tilde{\zeta}$ appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ qui ont pour socle l'idéal $\mathcal{P} = (P)$. C'est équivalent à déterminer l'ensemble des familles admises $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ qui sont associées aux pseudo-valuations appartenant à $\mathcal{E}_P$.

Toute pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ de $\mathcal{E}_P$ est une valuation bien définie de $K[x]$, nous rappelons qu'une valuation ou pseudo-valuation μ de $\mathcal{E}$ est dite bien définie si μ est soit une valuation augmentée $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$ pour une valuation μ_-, soit une valuation augmentée limite $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\big]$ pour une famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ (cf. [Va 3] Paragraphe 1).

Sur l'ensemble $\mathcal{E}$ nous avons deux relations d'ordre partiel $\mu \le \mu'$ et $\mu << \mu'$ définies de la manière suivante:

$$\mu \le \mu' \quad \text{si et seulement si} \quad \mu(f) \le \mu'(f) \quad \text{pour tout } f \text{ dans } K[x],$$

$$\mu << \mu' \quad \text{si et seulement si } \mathcal{A}(\mu) \text{ est une sous-famille de } \mathcal{A}(\mu') \ .$$

Si les deux valuations μ et μ' sont bien définies, ce que nous supposerons dans la suite, alors nous avons $\mu << \mu'$ si et seulement si μ appartient à la famille $\mathcal{A}(\mu')$.

Nous rappelons que si nous avons deux valuations μ et μ' de $\mathcal{E}$ qui vérifient $\mu \le \mu'$, nous définissons l'ensemble $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\mu,\mu')$ comme l'ensemble des polynômes f de $K[x]$ tels que $\mu(f) < \mu'(f)$. Si $\tilde{\Phi}$ est non vide, c'est-à-dire pour $\mu \neq \mu'$, nous notons d le degré minimal d'un polynôme appartenant à cet ensemble et nous posons

$$\Phi = \Phi(\mu,\mu') \ = \ \big\{\phi \in K[x] \mid \mu(\phi) < \mu'(\phi) \ , \ \deg\phi = d \text{ et } \phi \text{ unitaire}\big\} \ ,$$

et tout polynôme appartenant à Φ est un polynôme-clé pour μ.

La relation $\mu << \mu'$ entraine la relation $\mu \le \mu'$. Réciproquement nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1. *Soient μ et μ' deux valuations ou pseudo-valuations bien définies de $\mathcal{E}$ qui vérifient la relation $\mu \le \mu'$. Alors soit nous avons $\mu << \mu'$, soit nous pouvons écrire la valuation μ sous la forme $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, respectivement $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\big]$, et il existe un polynôme-clé ϕ'' pour μ avec $deg\phi'' = deg\phi$ et une valuation augmentée $\mu'' = [\mu \ ; \ \mu''(\phi') = \gamma']$ qui vérifie $\mu'' << \mu'$, dans ce cas nous avons encore $\mu'' = [\mu_- \ ; \ \mu''(\phi'') = \gamma'']$, respectivement $\mu'' = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu''(\phi'') = \gamma''\big]$.*

Preuve. Nous considérons d'abord le cas où μ est une valuation augmentée $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, avec μ_- qui n'est pas la valuation ν de K, alors nous avons $\mu_- << \mu'$, c'est-à-dire μ_- est une des valuations de la famille admise $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ associée à μ', c'est-à-dire est de la forme $\mu_i^{(j)}$. Nous avons $\mu_- \le \mu \le \mu'$, avec $\mu_- \neq \mu$, par conséquent les ensembles $\Phi = \Phi(\mu_-,\mu)$ et $\Phi' = \Phi(\mu_-,\mu')$ sont égaux (cf [Va 3] Lemme 1.3). Le polynôme-clé ϕ appartient à Φ et tout successeur de la valuation μ_- dans la famille $\mathcal{A}$ est défini à partir d'un polynôme appartenant à Φ'.

Supposons que nous ayons l'égalité $\gamma = \mu(\phi) = \mu'(\phi)$:

- i) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu,\mu')$ est vide alors nous avons $\mu = \mu'$.

- ii) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu,\mu')$ est non vide et le degré minimal d'un polynôme f dans $\tilde{\Phi}(\mu,\mu')$ est strictement plus grand que le degré de ϕ, alors nous avons $\mu = \mu_{i+1}^{(j)}$ et μ appartient à $\mathcal{A}$, d'où $\mu << \mu'$.

- iii) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu,\mu')$ est non vide et le degré minimal d'un polynôme de $\tilde{\Phi}(\mu,\mu')$ est égal au degré de ϕ, alors $\Phi(\mu,\mu')$ est égal à l'ensemble des ψ dans $\Phi(\mu_-,\mu')$ tels que $\mu'(\psi) > \mu'(\phi)$. Si l'ensemble des valeurs $\Lambda = \{\mu'(\psi),\ \psi \in \Phi(\mu,\mu')\}$ n'admet pas de plus grand élément alors la valuation μ appartient à une sous famille continue de $\mathcal{A}$ et nous avons $\mu << \mu'$. Si l'ensemble Λ admet un plus grand élément λ, la valuation μ'' cherchée est la valuation $\mu_{i+1}^{(j)} = [\mu_i^{(j)}\ ;\ \mu_{i+1}^{(j)}(\phi_{i+1}^{(j)}) = \gamma_{i+1}^{(j)}]$ avec $\gamma_{i+1}^{(j)} = \mu'(\phi_{i+1}^{(j)}) = \lambda = \gamma''$, dans ce cas nous avons $\phi'' = \phi + h$ avec $\mu_(h) = \gamma$ et $\gamma < \gamma''$.

Supposons que nous ayons l'inégalité $\gamma = \mu(\phi) < \mu'(\phi) = \gamma_1$. Comme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\phi) = \gamma_1]$ qui est aussi égale à la valuation augmentée $[\mu_-\ ;\ \mu_1(\phi) = \gamma_1]$ et qui vérifie $\mu \leq \mu_1 \leq \mu'$ avec $\mu_1(\phi) = \mu'(\phi)$.

Dans ce cas la valuation μ n'appartient pas à la famille $\mathcal{A}$, mais nous déduisons de ce qui précède appliquée à la valuation μ_1 que nous pouvons prendre pour μ'' soit μ_1, soit la valuation μ'' définie par le polynôme $\phi'' = \phi_{i+1}^{(j)}$ et par la valeur $\gamma'' = \gamma_{i+1}^{(j)}$. En particulier nous avons soit $\phi'' = \phi$, soit $\phi'' = \phi + h$ avec $\mu_-(h) = \gamma_1$, d'où ϕ'' μ-équivalent à ϕ.

Le cas où μ est une valuation augmentée associée à un polynôme unitaire ϕ de degré un, c'est-à-dire pour $\mu_- = \nu$, ou le cas où μ est une valuation augmentée limite, $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi) = \gamma\right]$, se démontrent de manière identique.

Définition. Nous appelons *valuation approchée* du polynôme P de $K[x]$ toute valuation bien définie μ de $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ pour laquelle il existe une pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ de $\mathcal{E}_P$ telle que $\mu \leq \tilde{\zeta}$ et qui vérifie $\mu(\phi) = \tilde{\zeta}(\phi)$ où ϕ est le polynôme qui définit μ. Nous disons que μ est la valuation approchée *associée* à la pseudo=valuation $\tilde{\zeta}$ de $\mathcal{E}_P$. Nous notons $\mathcal{VA}_P$ l'ensemble des valuations approchées de P.

De même nous appelons *racine approchée* du polynôme P de $K[x]$ tout polynôme ϕ qui définit une valuation approchée μ de P et nous notons $\mathcal{RA}_P$ l'ensemble des racines approchées de P.

Remarque 2.1. Dans la définition d'une famille admissible $\mathcal{A}$ nous avons demandé que pour toute sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ de $\mathcal{A}$, les polynômes-clé $\phi_i^{(j)}$ définissant la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ de $\mathcal{S}^{(j)}$ vérifient l'inégalité stricte $\deg\phi_i^{(j)} < \deg\phi_{i+1}^{(j)}$. Cette condition sur les degrés ayant pour fonction d'assurer la minimalité de la famille de valuations augmentées itérées apparaissant dans $\mathcal{S}^{(j)}$, et ainsi permet d'avoir l'unicité de la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ (cf. [Va 2]).

Nous pouvons ne pas imposer cette condition sur le degré, et seulement demander que pour toute valuation $\mu_i^{(j)}$ appartenant à $\mathcal{D}^{(j)}$ le poynôme-clé $\phi_{i+1}^{(j)}$ vérifie $\deg\phi_i^{(j)} \leq \deg\phi_{i+1}^{(j)}$ et ne soit pas $\mu_i^{(j)}$-équivalent à $\phi_i^{(j)}$. Nous trouvons alors une famille de valuations augmentées ou augmentées limites qui vérifie essentiellement les mêmes propriétés qu'une famille admissible.

Alors nous pouvons vérifier qu'une valuation μ est une valuation approchée du polynôme P si et seulement si elle appartient à une telle famille associée à l'une des pseudo-valuations $\tilde{\zeta}$ de $\mathcal{E}_P$.

Par définition une valuation approchée est une valuation et non une pseudo-valuation, en particulier toute valuation approchée de P est distincte de la pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ à laquelle elle est associée.

Théorème 2.2. *Soit μ une valuation bien définie de $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ et soit ϕ le polynôme qui définit la valuation μ. Alors μ est une valuation approchée du polynôme P si et seulement si*

i) P est μ_--divisible par ϕ si μ est la valuation augmentée $\mu = [\mu_-\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$ avec $\mu_- \neq \nu$, et est A-divisible si μ est la valuation augmentée limite $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi) = \gamma\right]$,

ii) il existe au moins un polynôme-clé ψ pour la valuation μ, avec ψ non μ-équivalent à ϕ, qui μ-divise P.

Remarque 2.2. La condition i) est équivalente à la condition $\mu_-(P) < \mu(P)$ dans le cas d'une valuation augmentée $\mu = [\mu_-\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$ et à la condition $\mu_\alpha(P) < \mu(P)$ pour tout α dans A dans le cas d'une valuation augmentée limite $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi) = \gamma\right]$. Dans le cas où μ_- est la valuation ν de K, c'est-à-dire pour μ associé à un polynôme unitaire de degré un, la condition i) est supposée toujours vérifiée.

La condition ii) est équivalente à demander que l'image de P dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ associée à la valuation μ admette un diviseur premier distinct de $H_\mu(\phi)$.

Plus généralement, pour tout un polynôme f il existe un polynôme μ-inversible e et des polynômes-clés pour la valuation μ, $\phi_1, \ldots, \phi_t$, $t \geq 0$, non μ-équivalents entre eux et des entiers $n_1, \ldots n_t$, tels que f soit μ-équivalent au produit $e{\phi_1}^{n_1} \ldots {\phi_t}^{n_t}$, et cette décomposition est unique à μ-équivalence près (cf. [Va 3] Corollaire à la Proposition 2.3). Cette décomposition correspond à la décomposition en facteurs irréductibles de l'image $H_\mu(f)$ dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$, $H_\mu(f) = EF_1^{n_1} \ldots F_t^{n_t}$, et au choix pour chaque F_j d'un polynôme de degré minimal ϕ_j avec $H_\mu(\phi_j) = F_j$.

Pour démontrer ce théorème nous allons introduire la notion de polygone de Newton (cf. [McL 2] Paragraphe 5 ou [Va 4] Paragraphe 5).

Soit μ une valuation de $K[x]$, si f et ϕ sont deux polynômes nous appelons ordre de μ-divisibilité de f par ϕ le plus grand entier n tel que ϕ^n μ-divise f. Rappelons qu'un polynôme ϕ est dit μ-minimal si tout polynôme f μ-divisible par ϕ vérifie $\deg f \geq \deg\phi$. Nous définissons le développement de f selon les puissances de ϕ par

$$f \;=\; f_m\phi^m + \ldots + f_1\phi + f_0 \;,$$

où $\deg f_j < \deg\phi$ pour tout $j = 0, \ldots, m$.

Définition. Le *polygone de Newton* associé aux polynômes f et ϕ et à la valuation μ est le sous-espace de $\mathbb{R}^+ \times \bar{\Gamma}$ défini comme l'enveloppe convexe de l'ensemble $\big\{(k, \delta) \mid \delta \geq \mu(f_k), 0 \leq k \leq m\big\}$. Nous le notons $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$.

La donnée du polygone de Newton $\mathcal{PN}$ est équivalente à la donnée suivante:
- une suite finie d'entiers: $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = m$,
-une suite finie de valeurs dans $\bar{\Gamma}$: $\delta_1 > \ldots > \delta_r$.

Les sommets du polygone sont les couples $\big(a_t, \mu(f_{a_t})\big)$, $0 \leq t \leq r$, et δ_t est la pente de la face F_t comprise entre les sommets $\big(a_{t-1}, \mu(f_{a_{t-1}})\big)$ et $\big(a_t, \mu(f_{a_t})\big)$, et nous posons $\delta_0 = +\infty$ et $\delta_{r+1} = -\infty$, c'est-à-dire $\delta_{r+1} < \delta$ pour tout δ dans $\bar{\Gamma}$.

Plus précisément, pour tout k, $0 \leq k \leq m$, nous avons l'inégalité:

$$\mu(f_k) + k\delta_t \;\geq\; \mu(f_{a_{t-1}}) + a_{t-1}\delta_t \;=\; \mu(f_{a_t}) + a_t\delta_t \;,$$

avec pour $k < a_{t-1}$ et pour $k > a_t$ l'inégalité stricte:

$$\mu(f_k) + k\delta_t \;>\; \mu(f_{a_{t-1}}) + a_{t-1}\delta_t \;=\; \mu(f_{a_t}) + a_t\delta_t \;.$$

Lemme 2.3. *Soit ϕ un polynôme μ-minimal, alors pour tout polynôme f, nous avons l'égalité*

$$\mu(f) \;=\; \inf\big(\mu(f_j\phi^j) \;;\; 0 \leq j \leq m\big) \;.$$

De plus, si n est l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ nous avons

$$\mu(f) \;=\; \mu(f_n\phi^n) \;<\; \mu\big(f_j\phi^j\big) \textit{ pour tout } j < n \;.$$

Preuve. Comme le polynôme ϕ est μ-minimal, il en est de même pour tout ϕ^j, $j \geq 1$, par conséquent si nous écrivons la division euclidienne $f = q\phi^j + r$ de f par ϕ^j, nous avons $\mu(r) \geq \mu(f)$ avec $\mu(r) > \mu(f)$ si et seulement si f est μ-divisible par ϕ^j, c'est-à-dire si l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ est supérieur ou égal à j.

Soit a le plus petit entier, $0 \leq a \leq m$, tel que $\mu(f_a\phi^a)$ soit égal à $\inf\big(\mu(f_j\phi^j) \;;\; 0 \leq j \leq m\big)$, alors nous avons $\mu\big(f_{a-1}\phi^{a-1} + \ldots + f_0\big) \geq \inf\big(\mu(f_j\phi^j) \;;\; 0 \leq j \leq a-1\big) > \mu\big(f_a\phi^a\big)$, d'où $\mu\big(f_a\phi^a\big) = \mu\big(f_{a-1}\phi^{a-1} + \ldots + f_0\big) \geq \mu(f)$. Nous en déduisons l'égalité $\mu\big(f_a\phi^a\big) = \mu(f)$, f n'est pas μ-divisible par ϕ^{a+1} et est μ-divisible par ϕ^a.

Nous en déduisons de façon immédiate le résultat suivant.

Corollaire. *Avec les hypothèses précédentes , le couple* $\big(n,\mu(f_n)\big)$ *est un sommet du polygone de Newton* $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$*, c'est-à-dire il existe* s*,* $0\le s\le r$ *tel que* $a_s=n$*.*

De plus si nous posons $\mu(\phi)=\delta$*, alors nous avons les inégalités:* $\delta_{s+1}\le\delta<\delta_s$*.*

Si ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ, pour toute valeur $\gamma>\delta=\mu(\phi)$ nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu'=[\mu\ ;\ \mu'(\phi)]$. Rappelons que par définition ϕ est un polynôme μ-minimal et que nous avons

$$\mu'(f)\ =\ \inf\big(\mu(f_k)+k\gamma;0\le k\le m\big)\ .$$

Par conséquent nous voyons que le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$ joue un rôle important pour l'étude des valuations augmentées de μ associées à un polynôme-clé donné ϕ, et plus particulièrement la partie du polygone de Newton correspondant aux pentes $\delta_i>\delta$, et nous posons la définition suivante.

Définition. La *partie principale* du polygone de Newton est la partie de $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$ de pente strictement plus grande que $\delta=\mu(\phi)$, c'est-à-dire la partie comprise entre les sommets $\big(0,\mu(f_0)\big)$ et $\big(n,\mu(f_n)\big)$, où n est l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ:

$$\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)^+\ =\ \mathcal{PN}(f;\mu;\phi)\cap\big([0,n]\times\bar\Gamma\big)\ .$$

Remarque 2.3. Si nous écrivons le polynôme f de $K[x]$ sous la forme $f=a_dx^d+\dots a_0$, nous pouvons définir le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\nu;x)$ comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^+\times\bar\Gamma$ de l'ensemble $\big\{(k,\delta)\mid\delta\ge\nu(a_k),0\le k\le d\big\}$.

Dans ce cas nous identifions la partie principale du polygone avec le polygone tout entier:

$$\mathcal{PN}(f;\nu;x)^+\ =\ \mathcal{PN}(f;\nu;x)\ .$$

Nous voulons étendre les définitions précédentes au cas d'une famille continue $\mathcal{C}$ de polynômes et d'un polynôme-clé limite ϕ pour la famille $\mathcal{C}$. Rappelons que si $\mathcal{C}=\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est une famille continue telle que l'ensemble $\tilde\Phi(A)=\big\{f\in K[x]\ /\ \mu_\alpha(f)<\mu_\beta(f)\ \forall\alpha<\beta \text{ dans } A\big\}$ est non vide, et si nous notons d_A le degré minimal d'un polynôme f appartenant à $\tilde\Phi(A)$, nous définissons l'ensemble

$$\Phi(A)\ =\ \big\{\phi\in K[x]\ /\ \mu_\alpha(\phi)<\mu_\beta(\phi)\ \forall\alpha<\beta \text{ dans } A\ ,\ \deg\phi=d_A \text{ et } \phi \text{ unitaire}\big\}\ ,$$

et tout polynôme ϕ de $\Phi(A)$ est un polynôme-clé limite pour $\mathcal{C}$.

De plus pour tout f n'appartenant pas à $\tilde\Phi(A)$ nous posons $\mu_A(f)=\sup\big(\mu_\alpha(f)\big)$, c'est-à-dire $\mu_A(f)=\mu_\alpha(f)$ pour α suffisamment grand. Alors pour tout γ dans $\bar\Gamma$ vérifiant $\gamma>\mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, nous pouvons définir la valuation augmentée limite $\mu'=\big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi)=\gamma\big]$ par

$$\mu'(f)\ =\ \inf\big(\mu_A(f_k)+k\gamma\ ;\ 0\le k\le m\big)\ ,$$

où $f=f_m\phi^m+\dots+f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ et où $\mu_A(f_k)$ est bien défini car $\deg f_k<\deg\phi=d_A$.

Définition. Le *polygone de Newton* $\mathcal{PN}\big(f;\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A};\phi\big)$ associé au polynôme f, à la famille continue $\mathcal{C}=\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ et au polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^+\times\bar\Gamma$ défini comme l'enveloppe convexe de l'ensemble $\big\{(k,\delta)\mid\delta\ge\mu_A(f_k),0\le k\le m\big\}$.

Nous notons encore $0=a_0<a_1<\dots<a_r=m$ et $\delta_1>\dots>\delta_r$ les suites définissant les sommets et les pentes du polygone de Newton, et soit s le plus grand entier tel que $\delta_s>\mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A.

La *partie principale* du polygone de Newton est la partie de $\mathcal{PN}\big(f;\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A};\phi\big)$ de pente strictement plus grande que $\mu_\alpha(\phi)$ pour tout α, c'est-à-dire la partie comprise entre les sommets $\big(0,\mu(f_0)\big)$ et $\big(a_s,\mu(f_{a_s})\big)$:

$$\mathcal{PN}\big(f;\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A};\phi\big)^+\ =\ \mathcal{PN}\big(f;\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A};\phi\big)\cap\big([0,a_s]\times\bar\Gamma\big)\ .$$

Nous avons un résultat analogue au lemme 2.3 pour une famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, associée aux familles $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ et $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, et un polynôme-clé limite ϕ. Nous rappelons que nous déduisons du théorème de factorisation, théorème 1.19 de [Va 1], l'existence pour tout polynôme f dans $K[x]$ d'un entier k, avec $k\mathrm{deg}\phi_\alpha < \mathrm{deg} f$, et d'une valeur λ dans $\bar\Gamma$ tels que $\mu_\alpha(f) = \lambda + k\gamma_\alpha$ pour tout α dans A suffisamment grand, en particulier le polynôme f appartient à $\tilde\Phi(A)$ si et seulement si $k \geq 1$.

Nous disons qu'un polynôme f est A-divisible par un polynôme g si et seulement si il existe α_0 dans A tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ le polynôme f est μ_α-divisible par g. Alors si ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, f appartient à $\tilde\Phi(A)$ si et seulement f est A-divisible par ϕ (cf. [Va 1] Proposition 1.21).

Nous disons aussi qu'un polynôme e est A-inversible, respectivement que deux polynômes f et g sont A-équivalents, si et seulement si il existe α_0 dans A tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ le polynôme e est μ_α-inversible, respectivement les polynômes f et g sont μ_α-équivalents.

Définition. Nous appelons *ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité*, ou *ordre de A-divisibilité* du polynôme f par le polynôme-clé limite ϕ le plus grand entier n tel que f soit A-divisible par ϕ^n.

Cet entier n est indépendant du polynôme-clé ϕ choisi car tous les polynômes-clés limites pour la famille $\mathcal{C}$ sont A-équivalents, nous pouvons donc dire que n est l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de f. De plus, comme tout polynôme n'appartenant pas à $\tilde\Phi(A)$ est A-inversible, nous en déduisons qu'il existe un polynôme e A-inversible tel que

$$f \underset{A}{\sim} e\,\phi^n \ .$$

Lemme 2.4. *Soit n l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de f et soit $f = f_m\phi^m + \ldots + f_0$ le développement de f selon les puissances d'un polynôme-clé limite ϕ, alors pour tout α suffisamment grand f est μ_α-équivalent à $f_n\phi^n$.*

Le couple $\big(n, \mu_A(f_n)\big)$ est un sommet du polygone de Newton $\mathcal{PN}\big(f; \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}; \phi\big)$, c'est-à-dire qu'il existe s, $0 \leq s \leq r$ tel que $a_s = n$. De plus nous avons $\delta_s > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A et il existe α avec $\mu_\alpha(\phi) > \delta_{s+1}$.

Preuve. Soient k_0 et λ_0 l'entier et la valeur associés au polynôme-clé limite ϕ, c'est-à-dire tels que nous ayons $\mu_\alpha(\phi) = \lambda_0 + k_0\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand, et nous avons $k_0 \geq 1$.

Pour tout α nous avons $\mu_\alpha(f) \geq \inf\big(\mu_\alpha(f_j\phi^j)\ ;\ 0 \leq j \leq\big)$, avec égalité si les $\mu_\alpha(f_j\phi^j)$ sont tous distincts, et pour α suffisamment grand nous avons $\mu_\alpha(f_j\phi^j) = \mu_A(f_j) + j(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha)$. Comme l'ensemble $\{\gamma_\alpha\}$ n'a pas de plus grand élément, nous en déduisons qu'il existe un entier n, $0 \leq n \leq m$ tel que nous ayons $\mu_\alpha(f) = \mu_A(f_n) + n(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha) < \mu_A(f_j) + j(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha)$ pour $j \neq n$, et n est l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de f par ϕ.

Nous déduisons les résultats concernant le polygone de Newton $\mathcal{PN}\big(f; \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}; \phi\big)$ des inégalités $\mu_A(f_j) + j\mu_\alpha(\phi) > \mu_A(f_n) + n\mu_\alpha(\phi)$ qui sont valables pour tout α suffisamment grand.

Remarque 2.4. L'entier k_0 et la valeur λ_0 sont indépendants du polynôme-clé limite ϕ, et pour tout polynôme f nous avons l'égalité $k = nk_o$, où k est l'entier associé à f et n est l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de f.

Si pour tout α nous écrivons $\phi = g_{a,\alpha}\phi_\alpha^a + \ldots + g_{0,\alpha}$ le développement de ϕ selon les puissances de ϕ_α, nous avons l'inégalité $a \geq k_0$. De plus si nous supposons que l'ensemble des valeurs $\{\gamma_\alpha; \alpha \in A\}$ a une borne supérieure $\bar\gamma$ nous avons $a = k_0$ et $g_{a,\alpha} = 1$ (cf. [Va 2] Théorème 3.5).

Soient μ une valuation et ϕ un polynôme-clé pour μ, alors pour tout polynôme f et pour toute relation de la forme

$$(*) \quad f \ = \ q_l\phi^l + \ldots + q_0 \ ,$$

sans faire aucune hypothèse sur les polynômes q_j nous pouvons définir un polygone de Newton $\mathcal{PN}(*)$ comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^+ \times \bar\Gamma$ de l'ensemble $\big\{(j,\delta) \mid \delta \geq \mu(q_j), 0 \leq j \leq l\big\}$. En général ce polygone dépend de l'écriture $(*)$ choisie, mais nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Si les polynômes q_j apparaissant dans $(*)$ sont tous μ-inversibles, alors le couple $\big(n, \mu(q_n)\big)$, où n est l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ, est un sommet du polygone de Newton*

$\mathcal{PN}(*)$, et la partie de $\mathcal{PN}(*)$ comprise entre les sommets $\big(0,\mu(q_0)\big)$ et $\big(n,\mu(q_n)\big)$ coïncide avec la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)^+$.

Preuve. Soit $\gamma > \delta = \mu(\phi)$ et soit μ' la valuation augmentée associée à ϕ et γ, $\mu'[\mu\ ;\ \mu'(\phi)=\gamma]$. Alors si l'écriture $(*)$ vérifie q_j μ-inversible, nous avons l'égalité

$$\mu(f) \ = \ \inf\big(\mu(q_j)+j\gamma\ ;\ 0\leq j\leq l\big)\ ,$$

(cf. [McL 1] Theorem 5.2, [Va 1] Corollaire à la Proposition 1.3). Nous avons par conséquent l'égalité

$$\inf\big(\mu(p_k)+k\gamma\ ;\ 0\leq k\leq m\big) \ = \ \inf\big(\mu(q_j)+j\gamma\ ;\ 0\leq j\leq l\big)$$

pour tout γ avec $\delta<\gamma<+\infty$, et nous en déduisons le résultat.

Dans la suite nous considèrerons les polygones de Newton associées au polynôme P définissant une extension L de K fixée et nous noterons $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$, $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$, le polygone de Newton associé aux polynômes P et ϕ et à la valuation μ, respectivement à la famille continue $\mathcal{C}=\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$. De même nous noterons $\mathcal{PN}_\mu(\phi)^+$ et $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)^+$ les parties principales de ces polygones de Newton.

Remarque 2.5. Si le polynôme ϕ est de degré supérieur au degré de P, alors le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$ est réduit au seul sommet $\big(0,\mu(P)\big)$, et si il est de degré égal à celui de P, nous avons $P=\phi+a_0$ et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$ a une seule face comprise entre les deux sommets $\big(0,\mu(a_0)\big)$ et $(1,0)$.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant, qui est une extension du lemme 1.1 de [Va 1].

Lemme 2.6. *Si μ_1 est une valuation bien définie, c'est-à-dire soit une valuation augmentée $[\mu\ ;\ \mu_1(\psi)=\delta]$, soit une valuation augmentée limite $\big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu_1(\psi)=\delta\big]$, alors pour tout polynôme g de $K[x]$, si g est μ_1-inversible, il est μ_1-équivalent à r où r est le reste de la division euclidienne de g par le poylnôme ψ qui définit la valuation μ_1.*

Preuve. Rappelons que comme ψ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1, nous avons toujours $\mu_1(r)\geq\mu_1(g)$ avec l'inégalité stricte $\mu_1(r)>\mu_1(g)$ si et seulement si g est μ_1-divisible par ψ (cf. [Va 1] Lemme 1.1).

Nous supposons que la valuation μ_1 est une valuation augmentée, le cas d'une valuation augmentée limite se démontre de manière similaire. Soit $g=a_s\psi^s+\ldots+a_1\psi+a_0$ le développement de g selon les puissances de ψ, avec $r=a_0$. Par hypothèse il existe un polynôme h tel que hg soit μ_1-équivalent à 1, c'est-à-dire tel que $\mu_1(hg-1)>\mu_1(hg)=\mu_1(1)=0$. Si nous avons $\mu_1(hg-1)=\mu(hg-1)$ alors hg est μ-équivalent à 1, par conséquent g n'est pas μ-divisible par ψ et $\mu_1(g)=\mu(g)$ et le résultat est une conséquence du lemme 1.4 de [Va 1].

Si au contraire nous avons $\mu_1(hg-1)>\mu(hg-1)$, alors nous pouvons choisir δ' avec $\mu(\psi)<\delta'<\delta=\mu_1(\psi)$ tel que nous ayons encore $\mu'(hg-1)>\mu'(1)=0$ où μ' est la valuation augmentée $\mu'=[\mu\ ;\ \mu'(\psi)=\delta']$. Par conséquent g est μ'-inversible, donc n'est pas μ'-divisible par ψ et nous avons $\mu(r)=\mu(a_0)=\mu'(g)$. Comme $\delta'<\delta$, nous déduisons alors le résultat des égalités $\mu'(g)=\inf\big(\mu(a_j)+j\delta'\ ;\ 0\leq j\leq s\big)$ et $\mu_1(g)=\inf\big(\mu(a_j)+j\delta\ ;\ 0\leq j\leq s\big)$.

Preuve du théorème. Montrons d'abord que si μ est une valuation approchée du polynôme P, elle vérifie les conditions i) et ii) du théorème. Par hypothèse, il existe alors une pseudo-valuation $\tilde\zeta$ dans $\mathcal{E}_P$ telle que $\mu\leq\tilde\zeta$ et $\gamma=\mu(\phi)=\tilde\zeta(\phi)$.

Si μ est un valuation augmentée, $\mu=[\mu_-\ ;\ \mu(\phi)=\gamma]$, comme μ_- est une valuation, nous avons $\mu_-(P)<+\infty$, d'où P appartient à $\tilde\Phi(\mu_-,\tilde\zeta)$ et par conséquent appartient à $\tilde\Phi(\mu,\tilde\zeta)$ d'après le lemme 1.3 de [Va 3], nous en déduisons que P est μ_--divisible par le polynôme-clé ϕ. Si μ est une valuation augmentée limite $\mu=\big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi)=\gamma\big]$, nous montrons de la même manière que pour tout α nous avons $\mu_\alpha(P)<\mu(P)$, par conséquent P est A-divisible par le polynôme-clé limite ϕ.

Si la condition ii) n'était pas vérifiée pour la valuation μ, le polynôme P serait μ-équivalent à un produit $e\phi^n$, avec e μ-inversible et $n\geq 0$. Nous aurions alors $\tilde\zeta(P-e\phi^n)\geq\mu(P-e\phi^n)>\mu(e\phi^n)=\tilde\zeta(e\phi^n)$, d'où l'égalité $\tilde\zeta(P)=\tilde\zeta(e\phi^n)$, ce qui est impossible car $\tilde\zeta(e\phi^n)<+\infty$.

Pour montrer la réciproque, nous allons faire une récurrence descendante sur le degré du polynôme ϕ. Plus précisément nous allons montrer que si μ est une valuation bien définie associée à un polynôme ϕ de degré d qui vérifie les conditions i) et ii) du théorème, il existe une nouvelle valuation bien définie μ' associée à un polynôme ϕ' de degré $d' > d$ qui vérifie encore les conditions i) et ii) du théorème et telle que nous ayons $\mu \leq \mu'$ et $\mu(\phi) = \mu'(\phi)$. En fait nous allons construire la valuation μ' comme valuation augmentée, $\mu' = [\mu_1 \ ; \ \mu'(\phi')]$ avec $\mu_1 = \mu$ ou μ_1 valuation augmentée pour la valuation μ, ou comme valuation augmentée limite, $\mu' = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu'(\phi')\right]$ avec $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}$ famille simple continue où chaque μ_α est une valuation augmentée pour μ.

Si nous avons $\deg\phi' = d' = \deg P$, alors ϕ' est égal à P, μ' est une des pseudo-valuations $\tilde{\zeta}$ appartenant à $\mathcal{E}_P$ et nous trouvons directement que μ est une valuation approchée du polynôme P. Si nous avons l'inégalité $\deg\phi' = d' < \deg P$, alors μ' est une valuation et par hypothèse de récurrence μ' est une valuation approchée de P associée à une pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ de $\mathcal{E}_P$. Nous avons alors les inégalités $\mu \leq \mu' \leq \tilde{\zeta}$, et comme ϕ est un polynôme de degré $d < \deg\phi'$ nous avons $\mu'(\phi) = \tilde{\zeta}(\phi)$, par conséquent μ est aussi une valuation approchée de P associée à $\tilde{\zeta}$.

Nous considérons la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles, $P \underset{\mu}{\sim} e\phi_0^{n_0}\phi_1^{n_1}\ldots\phi_t^{n_t}$, avec $\phi_0 = \phi$ et les ϕ_j sont des polynômes-clés pour μ non μ-équivalents entre eux, et $n_0 \geq 0$ et $n_j \geq 1$ pour $j = 1, \ldots, t$, et par hypothèse nous avons $t \geq 1$.

Pour tout $j = 1, \ldots, t$ nous considérons l'ensemble Ψ_j des polynômes-clés ψ pour μ qui sont μ-équivalents à ϕ_j, en effet dans la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles nous pouvons remplacer ϕ_j par n'importe quel polynôme ψ appartenant à Ψ_j. Un polynôme ψ appartient à Ψ_j si et seulement si nous avons $\psi = \phi_j - h$ avec h vérifiant $\deg h < \deg\phi_j$ et $\mu(h) > \mu(\phi_j)$.

Considérons le polynôme-clé ϕ_1 et l'ensemble Ψ_1. Au polynôme ϕ_1 et à la valuation μ nous pouvons associer le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$, qui est déterminé par le développement de P selon les puissances de ϕ_1, $P = q_m\phi_1^m + \ldots + q_0$. Nous avons associées à $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$ la suite d'entiers $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = m$ correspondant aux sommets $\left(a_k, \mu(q_{a_k})\right)$, et la suite de valeurs $\delta_1 > \ldots > \delta_r$ correspondant aux pentes des faces.

D'après le corollaire au lemme 2.3 le couple $\left(n_1, \mu(q_{n_1})\right)$ est un sommet du polygone $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$, et comme nous avons $n_1 > 0$ la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)^+$ du polygone est non vide et il existe au moins une face de pente $\delta > \mu(\phi_1)$. Si nous choisissons une de ces faces de pente $\delta = \delta_k$, comprise entre les sommets $\left(a_{k-1}, \mu(q_{a_{k-1}})\right)$ et $\left(a_k, \mu(q_{a_k})\right)$, $0 < k \leq s$, nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu \ ; \ \mu_1(\phi_1) = \delta]$. Alors le polynôme P est μ_1 équivalent à $q_{a_k}\phi_1^{n_k} + \ldots + q_{a_{k-1}}\phi_1^{n_{k-1}}$, et nous pouvons écrire

$$P \underset{\mu_1}{\sim} e' \ \phi_1^{n'} \ g \ ,$$

où e' est un polynôme μ_1-inversible, où $n' = a_{k-1} \geq 0$ et où g est un polynôme non μ_1-inversible d'après le lemme 2.6 et non μ_1-divisible par ϕ_1. Nous en déduisons que la valuation augmentée μ_1 vérifie la condition i), car P est μ-divisible par ϕ_1, et la condition ii), car g admet au moins un polynôme-clé ψ non μ_1-équivalent à ϕ_1 comme μ_1-diviseur.

Ainsi, s'il existe un polynôme-clé ϕ_j parmi les μ-diviseurs de P avec $\deg\phi_j > \deg\phi$, nous pouvons prendre pour valuation bien définie μ' la valuation augmentée $\mu' = [\mu \ ; \ \mu'(\phi') = \delta']$, où ϕ' est le polynôme-clé ϕ_j et où δ' est une des pentes de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_j)^+$ du polygone de Newton associé à ϕ_j.

Supposons que tous les polynômes-clés ϕ_j apparaissant comme facteurs μ-irréductibles de P aient pour degré $d = \deg\phi$, et comme précédemment nous en choisissons un ϕ_1 et nous considérons l'ensemble Ψ_1. A tout polynôme ψ dans Ψ_1 nous pouvons associer son degré d_1, la valeur $\gamma_1 = \mu(\psi)$ et n_1 l'ordre de μ-divisibilité de P par ψ, ces trois valeurs ne dépendent que de l'ensemble Ψ_1 et par hypothese nous avons $d_1 = \deg\phi$. Au polynôme ψ nous associons aussi son polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ et sa partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+ = \mathcal{PN}_\mu(\psi) \cap \left([0, n_1] \times \bar{\Gamma}\right)$, et nous voulons étudier $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ quand ψ parcourt Ψ_1.

Soient ψ et ψ' deux polynômes appartenant à Ψ_1, en particulier nous pouvons écrire $\psi' = \psi - h$ avec $\deg h < \deg\psi = d_1$ et $\mu(h) > \mu(\psi) = \gamma_1$, et soient les développements de P selon les puissances de ψ et de ψ', c'est-à-dire respectivement

$$P \;=\; q_m\psi^m + \ldots + q_0 \quad \text{et} \quad P \;=\; q'_m\psi'^m + \ldots + q'_0 \ .$$

Nous considérons les parties principales des polygones de Newton associés $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$, déterminés respectivement par les suites

$$0 = a_0 < a_1 <, \ldots < a_s = n_1 \quad \text{et} \quad \delta_1 > \ldots > \delta_s > \gamma_1 \quad \text{pour } \psi \ ,$$

$$0 = a'_0 < a'_1 <, \ldots < a'_{s'} = n_1 \quad \text{et} \quad \delta'_1 > \ldots > \delta'_{s'} > \gamma_1 \quad \text{pour } \psi' \ .$$

Nous déduisons du lemme 2.3 que comme ψ et ψ' sont des polynômes μ-minimaux nous avons l'égalité $\mu(P) = \mu(q_{n_1}) + n_1\gamma_1 = \mu(q'_{n_1}) + n_1\gamma_1$, par conséquent nous avons $\mu(q_{n_1}) = \mu(q'_{n_1})$, c'est-à-dire que le dernier sommet $\big(n_1, \mu(q_{n_1})\big)$ de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ ne dépend pas du polynôme ψ de Ψ_1.

Nous choisissons un polynôme-clé ψ appartenant à Ψ_1, nous appelons comme précédemment δ_1 la première pente du polygone de Newton associé $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$. Nous définissons alors la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\psi) = \delta_1]$.

Comme nous avons supposé $\deg\psi = \deg\phi$, pour tous les polynômes q_j apparaissant dans le développement de P selon les puissances de ψ nous avons $\mu(q_j) = \mu_1(q_j)$, par conséquent les polygones de Newton associés aux valuations μ et μ_1 sont égaux, $\mathcal{PN}_\mu(\psi) = \mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi)$. De plus comme δ_1 est la première pente du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi)$, nous déduisons du lemme 2.3 que P n'est pas μ_1-divisible par ψ.

Proposition 2.7. *Soit ψ' un polynôme-clé pour la valuation augmentée μ_1 vérifiant* $\deg\psi' = \deg\psi$ *et tel que P soit μ_1-divisible par ψ'. Alors le polynôme ψ' appartient à Ψ_1 et la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$ du polygone de Newton associé à ψ' coïncide avec la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ du polygone de Newton associé à ψ entre les sommets $\big(a_1, \mu(q_{a_1})\big)$ et $\big(n_1, \mu(q_{n_1})\big)$, est au dessus de $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ entre $\big(0, \mu(q_0)\big)$ et $\big(a_1, \mu(q_{a_1})\big)$ et son premier sommet $\big(0, \mu(q'_0)\big)$ est strictement au dessus de celui de $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$.*

Plus précisément si nous appelons encore $0 = a_0 < a_1 <, \ldots < a_s = n_1$, $\delta_1 > \ldots > \delta_s > \gamma_1$ et $0 = a'_0 < a'_1 <, \ldots < a'_{s'} = n_1$, $\delta'_1 > \ldots > \delta'_{s'} > \gamma_1$ les suites associées à $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et à $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$, nous avons $s' = s + t$ avec $t \geq 0$, $a'_{j+t} = a_j$ pour $1 \leq j \leq s$, $\delta'_{j+t} = \delta_j$ pour $2 \leq j \leq s$, $\delta'_{1+t} \geq \delta_1$ et $\mu(q'_0) > \mu(q_0)$. Nous pouvons aussi remarquer que comme P est μ_1-divisible par ψ', les polynômes ψ et ψ' ne sont pas μ_1-équivalents.

Preuve de la proposition. Si ψ' est un polynôme-clé pour la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\psi) = \delta_1]$ non μ_1-équivalent à ψ et de même degré que ψ, nous avons $\psi' = \psi - h$ avec $\deg h < \deg\psi$ et $\mu(h) = \delta_1$ (cf. [McL 1] Theorem 9.4, [Va 1] Théorème 1.11). En particulier nous en déduisons que ψ' est μ-équivalent à ψ, par conséquent appartient aussi à Ψ_1.

Soit δ vérifiant $\delta_1 \geq \delta > \gamma_1$, alors les valuations augmentées $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\psi) = \delta]$ et $\mu'' = [\mu\ ;\ \mu''(\psi') = \delta]$ sont égales (cf. [Va 2] Proposition 1.2), par conséquent nous avons l'égalité

$$\mu'(P) \;=\; \inf\big(\mu(q_j) + j\delta\ ;\ 0 \leq j \leq m\big) \;=\; \inf\big(\mu(q'_j) + j\delta\ ;\ 0 \leq j \leq m\big) \ ,$$

où $P = q_m\psi^m + \ldots + q_0$ et $P = q'_m\psi'^m + \ldots + q'_0$ sont les développements de P selon les puissances de ψ et de ψ'. Nous en déduisons l'égalité entre les parties des polygones de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')$ correspondant à des pentes δ vérifiant $\delta_1 > \delta > \gamma_1$. En particulier nous en déduisons l'existence de $t \geq 0$ tel que $s' = s + t$, $a'_{j+t} = a_j$ et $\delta'_{j+t} = \delta_j$ pour $2 \leq j \leq s$. De plus, pour tout δ avec $\inf(\delta_1, \delta'_{1+t}) > \delta > \delta_2 = \delta'_{2+t}$, nous avons l'égalité $\mu'(P) = \mu(q_{a_1}) + a_1\delta = \mu(q'_(a'_{1+t}) + a'_{1+t}\delta$, d'où $a'_{1+t} = a_1$.

Si nous avions $\delta_1 > \delta'_{1+t}$, alors pour tout δ avec $\delta_1 > \delta > \delta'_{1+t}$ nous aurions l'égalité $\mu'(P) = \mu(q_{a_1}) + a_1\delta = \mu(q'_{a'_t}) + a'_t\delta$, ce qui est impossible car $a'_t < a'_{1+t} = a_1$.

Par hypothèse P est μ_1-divisible par le polynôme μ_1-minimal ψ', alors comme q'_0 est le reste de la division euclidienne de P par ψ' nous avons l'inégalité stricte $\mu_1(q'_0) > \mu_1(P)$, c'est-à-dire $\mu(q'_0) > \mu(q_0)$. Par conséquent, si nous avons $\delta_1 = \delta'_{1+t}$, nous devons avoir $t \geq 1$ et $0 < a'_t < a_1$.

Suite de la preuve du théorème. A tout polynôme ψ appartenant à Ψ_1 nous associons la valeur $\lambda(\psi) = \mu(q_0(\psi))$, où $q_0 = q_0(\psi)$ est défini par le développement de P selon les puissances de ψ, $P = q_m\psi^m + \ldots + q_0$. Comme P est iréductible, pour $\deg P > \deg\psi$ nous avons toujours $q_0 \neq 0$, par conséquent $\lambda(\psi) \neq +\infty$ et nous définissons le sous-ensemble Λ_1 de $\bar{\Gamma}$ par $\Lambda_1 = \{\lambda(\psi)\ /\ \psi \in \Psi_1\}$.

Si l'ensemble Λ_1 a un plus grand élément $\bar{\lambda}$, nous choisissons ψ dans Ψ_1 avec $\lambda(\psi) = \bar{\lambda}$. Nous déduisons alors de la proposition 2.7 que tout polynôme-clé ϕ' pour la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\psi) = \delta_1]$ qui μ_1-divise P est de degré $\deg\phi' > \deg\psi$. Nous trouvons alors comme précédemment que pour toute pente δ' de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi')$, la valuation augmentée $\mu' = [\mu_1\ ;\ \mu'(\phi') = \delta']$ satisfait les conditions i) et ii) du théorème avec $\deg\phi' > \deg\phi$.

Supposons maintenant que l'ensemble Λ_1 n'a pas de plus grand élément. Nous choisissons un polynôme ψ appartenant à Ψ_1 tel que l'indice a_1, $0 < a_1 \leq m$ du deuxième sommet $\big(a_1, \mu(q_{a_1})\big)$ du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ associé à ψ est minimal, et nous appelons encore δ_1 la pente de la première face de $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et μ_1 la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\psi) = \delta_1]$. Nous considérons le sous-ensemble Ψ_1^* de Ψ_1 défini par

$$\Psi_1^* \;=\; \big\{\psi'\ /\ \psi' \text{ polynôme-clé pour } \mu_1 \text{ et } \psi' \underset{\mu_1}{\mid} P\big\}\ .$$

Alors d'après la proposition 2.7 pour tout polynôme ψ' appartenant à Ψ_1^* les parties principales $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$ des polygones de Newton associés respectivement à ψ et ψ' ont même nombre de faces, coïncident sur $[a_1, a_s] \times \bar{\Gamma}$ et de plus $\big(a_1, \mu(q_{a_1})\big)$ est un sommet commun aux deux polygones de Newton. Nous définissons aussi le sous-ensemble Λ_1^* de Λ_1 par:

$$\Lambda_1^* \;=\; \big\{\lambda(\psi') = \mu(q_0(\psi'))\ /\ \psi' \in \Psi_1^*\big\}\ .$$

L'ensemble Λ_1^* n'a pas de plus grand élément et nous pouvons écrire $\Lambda_1^* = \{\lambda_\alpha\ /\ \alpha \in A\}$ où A est un ensemble totalement ordonné tel que $\lambda_\alpha < \lambda_\beta$ pour $\alpha < \beta$ dans A. Pour tout α dans A nous choisissons un polynôme ψ_α dans Ψ_1^* avec $\lambda(\psi_\alpha) = \lambda_\alpha$. Nous notons γ_α la pente de la première face du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_\alpha)$ associé à ϕ_α, nous avons l'égalité $\lambda_\alpha = \mu(q_{a_1}) + a_1\gamma_\alpha$, et nous définissons la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$.

La famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est une famille simple continue de valuations augmentées, et nous définissons l'ensemble $\tilde{\Phi}(A) = \{f \in K[x]\ /\ \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f) \text{ pour tout } \alpha < \beta \text{ dans } A\}$. Par construction nous avons $\mu_\alpha(P) = \lambda_\alpha$, le polynôme P appartient à $\tilde{\Phi}(A)$ et par conséquent P est A-divisible par tout polynôme-clé limite ϕ' associé à la famille $\mathcal{C}$. Rappelons qu'un polynôme ϕ' est un polynôme-clé limite si ϕ' est un polynôme appartenant à $\tilde{\Phi}(A)$ de degré minimal et unitaire.

Nous voulons montrer que ϕ' est de degré $d' > d = \deg\phi = \deg\phi_\alpha$, pour cela il suffit de vérifier qu'il n'existe pas de polynôme unitaire ψ' avec $\deg\psi' = d$ appartenant à $\tilde{\Phi}(A)$. Supposons qu'il existe un tel polynôme ψ', alors nous déduisons de l'inégalité $\mu_\alpha(\psi') < \mu_\beta(\psi')$ que pour tout α dans A, ψ' est un polynôme-clé pour la valuation μ_α et nous pouvons écrire ψ' sous la forme $\psi' = \psi_\alpha + h_\alpha$ avec $\mu(h_\alpha) = \gamma_\alpha$ et $\deg h_\alpha < d$, par conséquent ψ' appartient à Ψ_1^*. Il existe alors θ dans A tel que $\lambda(\psi') = \lambda_\theta$, et nous posons $\psi' = \psi_\theta + h_\theta$. Comme ψ' est un polynôme-clé pour μ_α et comme $\mu_\alpha(\psi') = \gamma_\alpha$, nous avons l'égalité $\mu_\alpha(P) = \inf\big(\mu(q'_j) + j\gamma_\alpha\ ;\ 0 \leq j \leq m\big)$, où $P = q'_m\psi'^m + \ldots q'_0$ est le développement de P selon les puissances de ψ'. Nous en déduisons l'inégalité $\lambda_\theta = \mu(q'_0) \geq \mu_\alpha(P) = \lambda_\alpha$ pour tout α dans A, ce qui contredit le fait que Λ_1^* n'a pas de plus grand élément.

Nous choisissons un polynôme-clé limite ϕ' pour la famille $\mathcal{C}$ et nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi')$ défini à partir du développement de P selon les puissances de ϕ'. Alors pour toute pente δ' d'une face de la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi')^+$ du polygone de Newton, nous pouvons définir la valuationaugmentée limite $\mu' = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi') = \delta'\big]$, et nous vérifions que la valuation bien définie μ' satisfait encore les conditions i) et ii) du théorème.

Pour tout polynôme irréductible unitaire P de $K[x]$ et pour toute valuation bien définie μ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ définie par un polynôme ϕ, nous pouvons définir l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ des pseudo-valuations $\tilde{\zeta}$ appartenant à $\mathcal{E}_P$ vérifiant $\mu \leq \tilde{\zeta}$ et $\mu(\phi) = \tilde{\zeta}(\phi)$, et nous notons $b_P(\mu)$ le cardinal de cet ensemble.

Par définition μ est une valuation approchée de P si et seulement si l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ est non vide et $b_P(\mu)$ est le nombre de pseudo-valuations de $\mathcal{E}_P$ auxquelles μ est associée.

Comme précédemment nous fixons un polynôme irréductible unitaire P de $K[x]$ et soit μ une valuation approchée de P définie par le polynôme ϕ, $\mu[\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$ ou $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\big]$, et $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$.

Soit $\mu' = [\mu \ ; \ \mu'(\phi') = \gamma']$ une valuation augmentée définie par un polynôme-clé ϕ' vérifiant $\deg\phi' \geq \deg\phi$ et non μ-équivalent à ϕ. Nous avons alors le résultat suivant.

Lemme 2.8. *L'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu')$ est le sous-ensemble de $\mathcal{B}_P(\mu)$ constitué des pseudo-valuations $\tilde{\zeta}$ vérifiant $\tilde{\zeta}(\phi') = \mu'(\phi') = \gamma'$.*

Preuve. Si $\tilde{\zeta}$ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu')$, nous avons $\mu' \leq \tilde{\zeta}$ et $\tilde{\zeta}(\phi') = \mu'(\phi') = \gamma'$. Par conséquent nous avons aussi $\mu \leq \tilde{\zeta}$ et $\tilde{\zeta}(\phi) = \mu'(\phi) = \mu(\phi)$.

Réciproquement si $\tilde{\zeta}$ est une pseudo-valuation vérifiant $\mu \leq \tilde{\zeta}$ et $\gamma' \leq \tilde{\zeta}(\phi')$, la valuation augmentée μ' associée au polynôme ϕ' et à la valeur γ' vérifie aussi $\mu' \leq \tilde{\zeta}$.

De l'inclusion $\mathcal{B}_P(\mu') \subset \mathcal{B}_P(\mu)$ pour μ' valuation augmentée pour la valuation μ et du fait que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu)$ sont finis, nous déduisons que pour toute famille simple continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ il existe α_0 tel que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_\alpha)$ sont égaux pour $\alpha \geq \alpha_0$. Nous pouvons définir alors l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ par $\mathcal{B}_P(\mathcal{C}) = \bigcap \mathcal{B}_P(\mu_\alpha) = \mathcal{B}_P(\mu_\alpha)$ pour α suffisamment grand.

Nous voulons préciser comment se comportent les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu)$ quand nous passons de la valuation approchée μ de P aux valuations augmentées μ' pour μ qui sont encore des valuations approchées de P. Nous considérons la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles, $P \underset{\mu}{\sim} e\phi_0^{n_0}\phi_1^{n_1}\ldots\phi_t^{n_t}$, avec $\phi_0 = \phi$ et les ϕ_j sont des polynômes-clés pour μ non μ-équivalents entre eux, et $n_0 \geq 0$ et $n_j \geq 1$ pour $j = 1, \ldots, t$, et nous appelons n l'ordre de μ_--divisibilité ou de $\mathcal{C}$-divisibilité de P par ϕ. Nous déduisons alors du théorème 2.2 que nous avons $n \geq 1$ et $t \geq 1$.

Si P est un polynôme-clé pour la valuation μ nous avons $t = 1$, $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$, sinon pour tout $i = 1, \ldots, t$ nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$ associé au polynôme ϕ_i et nous appelons $\delta_1^{(i)} > \ldots > \delta_{s_i}^{(i)}$ les pentes des faces de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)^+$. Nous pouvons alors définir pour tout $i = 1, \ldots, t$ et tout $j = 1, \ldots, s_i$, la valuation augmentée $\mu_j^{(i)} = [\mu \ ; \ \mu_j^{(i)}(\phi_i) = \delta_j^{(i)}]$ associée au polynôme-clé ϕ_i et à la valeur $\delta_j^{(i)} > \mu(\phi_i)$.

Proposition 2.9. *Si P est un polynôme-clé pour la valuation μ, l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ contient une seule pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ définie par $\tilde{\zeta} = [\mu \ ; \ \tilde{\zeta}(P) = +\infty]$.*

Sinon, pour tout $i = 1, \ldots, t$ et tout $j = 1, \ldots, s_i$, la valuation $\mu_j^{(i)}$ est une valuation approchée du polynôme P, et l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ est l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$.

Preuve. Soit $\mu_j^{(i)}$ la valuation augmentée associée au polynôme-clé ϕ_i et à la valeur $\delta_j^{(i)} > \mu(\phi_i)$. Par hypothèse ϕ_i est un μ-diviseur du polynôme P. Si nous écrivons $P = q_m\phi_i^m + \ldots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ_i et si $\delta_j^{(i)}$ est la pente de la face du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$ comprise entre les sommets $\big(a_{j-1}, \mu(q_{a_{j-1}})\big)$ et $\big(a_j, \mu(q_{a_j})\big)$, alors P est $\mu_j^{(i)}$-équivalent à $q_{a_j}\phi_i^{a_j} + \ldots + q_{a_{j-1}}\phi_i^{a_{j-1}}$ et par conséquent il existe un polynôme-clé ψ pour la valuation $\mu_j^{(i)}$ non $\mu_j^{(i)}$-équivalent à ϕ_i qui $\mu_j^{(i)}$-divise P. Nous déduisons du théorème 2.2 que la valuation $\mu_j^{(i)}$ est une valuation approchée de P.

Soit $\tilde{\zeta}$ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mu)$, alors nous avons $\mu \leq \tilde{\zeta}$ et nous pouvons définir les ensembles $\tilde{\Phi}(\mu, \tilde{\zeta})$ et $\Phi(\mu, \tilde{\zeta})$. Nous déduisons de l'égalité $\mu(\phi) = \tilde{\zeta}(\phi)$ que tout polynôme-clé ψ appartenant à $\Phi(\mu, \tilde{\zeta})$ vérifie $\deg\psi \geq \deg\phi$ et n'est pas μ-équivalent à ϕ. De plus comme P appartient à $\tilde{\Phi}(\mu, \tilde{\zeta})$, le polynôme ψ μ-divise P.

Si P est un polynôme-clé pour μ alors nous avons forcément $\psi = P$ et il existe une unique pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mu)$ qui est définie par $\tilde{\zeta} = [\mu \ ; \ \tilde{\zeta}(P) = +\infty]$.

Sinon, nous pouvons supposer que le polynôme-clé ψ est l'un des ϕ_i et si nous posons $\delta = \tilde{\zeta}(\phi_i)$ la valuation augmentée $\mu' = [\mu \ ; \ \mu'(\phi_i) = \delta]$ est une valuation approchée du polynôme P associée à $\tilde{\zeta}$, c'est-à-dire $\tilde{\zeta}$ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu')$. La valeur δ est égale à la pente d'une des faces de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$, c'est une conséquence de l'inégalité $\mu'(P) < \tilde{\zeta}(P)$, par conséquent la valuation μ' est l'une des valuations $\mu_j^{(i)}$.

Il reste à montrer que les ensembles $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$ sont disjoints. Si la pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ appartient à $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$, alors nous avons $\tilde{\zeta}(\phi_i) = \delta_j^{(i)}$, par conséquent les ensembles $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$ et $\mathcal{B}_P\big(\mu_k^{(i)}\big)$ sont disjoints pour $j \neq k$. De plus pour $l \neq i$, le polynôme ϕ_l n'est pas μ-divisible par ϕ_i, par conséquent nous avons $\tilde{\zeta}(\phi_l) = \mu(\phi_l)$ pour tout $\tilde{\zeta}$ dans $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$ et comme nous avons $\delta_k^{(l)} > \mu(\phi_l)$ pour tout $k = 1, \ldots, s_l$, la pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ n'appartient à aucun des ensembles $\mathcal{B}_P\big(\mu_k^{(l)}\big)$.

Remarque 2.6. Nous pouvons énoncer un résultat similaire pour la valuation ν de K. Plus précisément, si nous appelons $\delta_1 > \ldots > \delta_s$ les pentes des faces du polygone de Newton $\mathcal{PN}(P;\nu;x)$, nous pouvons définir pour tout $j = 1, \ldots, s$ la valuation augmentée $\mu_j = [\nu\ ;\ \mu_j(x) = \delta_j]$. Alors chacune des valuations μ_j ainsi définie est une valuation approchée de P et l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations $\tilde{\zeta}$ de $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ de socle (P) est égal à l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_j)$.

Nous avons un résultat similaire pour l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ associé à une famille continue. Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ une famille simple continue de valuations approchées de P et soit ϕ un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$. Nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ associé à ϕ et nous appelons $\delta_1 > \ldots > \delta_s$ les pentes de la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$, et nous définissons pour $j = 1, \ldots, s$ la valuation augmentée limite $\mu_i = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu_i(\phi) = \delta_i\big]$ associée au polynôme ϕ et à la valeur δ_i.

Proposition 2.10. *Si P est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ contient une seule pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$ définie par $\tilde{\zeta} = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu_i(\phi) = +\infty\big]$.*

Sinon, pour tout $i = 1, \ldots, s$ la valuation μ_i est une valuation approchée du polynôme P, et l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ est l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_i)$.

Preuve. Comme précédemment nous vérifions que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_i)$ sont disjoints car si $\tilde{\zeta}$ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu_i)$ nous avons $\tilde{\zeta}(\phi) = \delta_i$, et qu'ils sont inclus dans $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ car nous avons $\mu_\alpha \leq \mu_i$ et $\mu_\alpha(\phi_\alpha) = \mu_i(\phi_\alpha) = \tilde{\zeta}(\phi_\alpha)$.

Soit $\tilde{\zeta}$ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ et supposons que P n'est pas un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, alors P est A-divisible par le polynôme-clé limite ϕ et la valuation augmentée limite $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu_i(\phi) = \tilde{\zeta}(\phi)\big]$ est une valuation approchée de P. Comme précédemment nous montrons que les seules valeurs possibles pour $\tilde{\zeta}(\phi)$ sont les pentes δ_i de la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ du polygone de Newton, par conséquent la valuation μ est l'une des valuatons μ_i.

Remarque 2.7. La décomposition de P en facteurs μ-irréductibles $P \underset{\mu}{\sim} e\phi_0^{n_0}\phi_1^{n_1}\ldots\phi_t^{n_t}$ est unique à μ-équivalence près, mais si nous remplaçons un polynôme ϕ_i par un polynôme μ-équivalent ϕ'_i distinct de ϕ_i, nous pouvons obtenir un polygone de Newton dont la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi'_i)^+$ est différente de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)^+$ de celui associé à ϕ_i. Par conséquent nous pouvons trouver une autre famille de valuations $\mu_j'^{(i)}$, avec $1 \leq j \leq s'_i$, avec éventuellement $s_i \neq s'_i$, mais nous déduisons de la démonstration de la proposition que l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu,\phi_i) = \bigcup_{j=1}^{s_i} \mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$ ne dépend que de la classe de μ-équivalence du polynôme-clé ϕ_i, c'est-à-dire de son image $H_\mu(\phi_i)$ dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$.

De même la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ du polygone de Newton dépend du polynôme-clé limite ϕ choisi, mais l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{B}_P\big(\mu_i\big)$ ne dépend que de la famille $\mathcal{C}$.

3 Cas d'un corps valué hensélien

Nous voulons décrire les valuations approchées d'un polynôme P, et les polygones de Newton associés dans le cas où le corps valué (K,ν) est hensélien, c'est-à-dire tel que pour toute extension algébrique L de K il existe un unique prolongement de ν à L.

Rappelons que si P un polynôme irréductible séparable unitaire appartenant à $K[x]$ et si L est l'extension algébrique de K définie par P, c'est-à-dire $L = K[x]/(P)$, il existe une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations $\tilde{\zeta}$ appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ ayant pour socle l'idéal (P) et l'ensemble des valuations ζ de L qui prolongent ν. Nous allons donc étudier ce qui se passe pour les valuations approchées μ de P quand l'ensemble $\mathcal{E}_P$ contient un seul élément.

Théorème 3.1. *Soit P un polynôme irréductible unitaire tel que l'ensemble $\mathcal{E}_P$ contienne une seule pseudo-valuation $\tilde{\zeta}$.*

Pour toute valuation approchée μ de P définie par un polynôme ϕ, la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles est de la forme

$$P \underset{\mu}{\sim} e\ \psi^n \ ,$$

avec e polynôme μ-inversible, ψ polynôme-clé pour μ non μ-équivalent à ϕ et $n \geq 1$. De plus si ψ est différent de P le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face de pente $\delta > \mu(\psi)$.

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ une famille simple continue de valuations approchées de P, alors si P n'est pas un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, pour tout polynôme-clé limite ϕ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ est égal à sa partie principale et a une seule face.

Preuve. Nous déduisons de la proposition 2.9 que pour toute valuation approchée μ du polynôme P, il existe un unique polynôme-clé ψ pour la valuation μ non μ-équivalent à ϕ qui μ-divise P, c'est-à-dire $t = 1$ et $\psi = \phi_1$, et que la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ du polygone de Newton associé à ψ possède une seule face, c'est-à-dire $s_1 = 1$. Il reste à montrer que P n'est pas μ-divisible par le polynôme ϕ, c'est-à-dire n_0, et que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ est égal à sa partie principale, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de face de pente $\delta \leq \mu(\psi)$.

Pour toute famille simple continue de valuations approchées $\mathcal{C}$ et pour tout polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$ nous avons toujours P qui est A-équivalent à $e\phi^n$, avec e polynôme A-inversible et $n \geq 1$, et de même nous déduisons de la proposition 2.10 que la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ possède une seule face, et il reste à montrer que le polygone de Newton est égal à sa partie principale.

Nous allons procéder par récurrence sur le degré du polynôme ϕ définissant la valuation approchée μ, ou des polynômes ϕ_α définissant les valuations approchées de la famille simple continue $\mathcal{C}$, le cas $\deg\phi = 1$ étant une conséquence immédiate de la remarque 2.6.

Premièrement nous allons montrer que si μ est une valuation approchée du polynôme P, $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, telle que ϕ soit le seul μ_--diviseur irréductible de P et telle que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_-}(\phi)$ ait une seule face, alors P a un seul μ-diviseur premier ψ, avec ψ polynôme-clé pour μ non μ-équivalent à ϕ, et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face.

Soit $P = q_m\phi^m + \ldots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ, alors le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_-}(\phi)$ a une seule face si et seulement si il existe δ tel que nous ayons $\mu_-(q_0) = \mu_-(q_m) + m\delta \leq \mu_-(q_j) + j\delta$ pour tout j, et comme μ est une valuation approchée de P nous avons $\delta = \gamma$, c'est à dire $\mu(P)$ est égal à $\mu_-(q_0) = \mu_-(q_m) + m\delta$. Nous en déduisons que P n'est pas μ-divisible par ϕ, par conséquent la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles est de la forme $P \underset{\mu}{\sim} e\psi^n$, avec ψ non μ-équivalent à ϕ.

Nous en déduisons aussi que $D_\phi(P)$ est égal à m, où le degré effectif en ϕ pour la valuation μ, $D_\phi(f)$, d'un polynôme f est le plus grand entier j vérifiant $\mu(f) = \mu_-(f_j) + j\gamma$, avec $f = f_d\phi^d + \ldots + f_0$ développement de f selon les puissances de ϕ (cf. [McL 2] §4). Comme ψ est un polynôme-clé pour la valuation augmentée ϕ nous avons $\psi = \phi^a + \ldots + h_0$ avec $\mu(\psi) = a\gamma = \mu_-(h_0)$, nous en déduisons $D_\phi(\psi) = a$, et comme le degré effectif est additif nous trouvons $m = D_\phi(P) = nD_\phi(\psi) = na$.

Soit $P = p_r\psi^r + \ldots + p_0$ le développement de P selon les puissances de ψ, alors nous avons l'inégalité $r \geq n$. Nous déduisons des développements de P selon les puissances respectivement de ϕ et de ψ

$$(m+1)\ \deg\phi \ > \ \deg P \ \geq \ r\ \deg\psi \ = \ ra\ \deg\phi \ ,$$

d'où $na = m \geq ra$, par conséquent nous avons $r = n$. L'ordre de μ-divisibilité de P par ψ est alors maximal, ce qui entraîne que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ est égal à sa partie principale, par conséquent il a une seule face de pente $\delta' > \mu(\psi)$.

Deuxièmement nous allons montrer que si μ est une valuation approchée du polynôme P de la forme $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma \right]$, telle que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ possède une seule face, alors comme dans le cas précédent P a un seul μ-diviseur premier ψ, avec ψ polynôme-clé pour μ non μ-équivalent à ϕ, et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face.

Comme le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ possède une seule face, l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de P est maximal, et si nous écrivons encore $P = q_m\phi^m + \ldots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ il existe une valeur δ telle que nous ayons $\mu_A(q_0) = \mu_A(q_m) + m\delta \le \mu_A(q_j) + j\delta$ pour tout j, et comme μ est une valuation approchée de P nous avons $\gamma = \delta$.

Comme précédemment nous déduisons de l'égalité $\mu(P) = \mu_A(q_0)$ que P n'est pas μ-divisible par ϕ et le même raisonnement sur le degré effectif $D_\phi(P)$ montre encore que l'ordre de μ-divisibilité de P par un polynôme-clé ψ pour μ est maximal, c'est-à-dire que le poygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face.

Enfin nous allons montrer que si $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est une famille simple continue de valuations approchées de P telle que pour tout α le polynôme P n'est pas μ_α-divisible par ϕ_α et telle que pour tout $\alpha < \beta$ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_\alpha}(\phi_\beta)$ a possède une seule face, alors pour tout polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ est égal à sa partie principale.

Nous pouvons écrire pour tout α le développement de ϕ selon les puissances de ϕ_α, $\phi = g_{a,\alpha}\phi_\alpha^a + \ldots + g_{0,\alpha}$, et soit k_0 l'entier tel que nous ayons l'égalité $\mu_\alpha(\phi) = \lambda_0 + k_0\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand. Alors pour tout $\alpha < \beta$ suffisamment grands nous avons $D_{\phi_\beta}(\phi) = k_0$ où D_{ϕ_β} est le degré effectif en ϕ_β pour la valuation μ_α, et nous avons $1 \le k_0 \le a$.

Soit $P = q_m\phi^m + \ldots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ, alors si n est l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de P, nous avons $P \underset{\mu_\alpha}{\sim} q_n\phi^n$ et $\mu_\alpha(P) = \lambda + (nk_0)\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand, avec $1 \le n \le m$. Par hypothèse pour tout $\alpha < \beta$, μ_α est une valuation approchée pour P et ϕ_β est un μ_α-diviseur de P, par conséquent P est μ_α-équivalent à $e\phi_\beta^s$, c'est-à-dire $D_{\phi_\beta}(P) = s$ avec $P = p_s\phi_\beta^s + \ldots + p_0$, et nous trouvons l'égalité $s = D_{\phi_\beta}(q_n\phi^n) = nk_0$ car q_n estμ_β-inversible.

Nous déduisons des développements de P selon les puissances de ϕ et de ϕ_β et du développement de ϕ selon les puissances de ϕ_β les inégalités

$$(s+1)\mathrm{deg}\phi_\beta > \mathrm{deg}P \ge m\mathrm{deg}\phi \quad \text{et} \quad \mathrm{deg}\phi = a\mathrm{deg}\phi_\beta + \mathrm{deg}g_{a,\alpha} \ge k_0\mathrm{deg}\phi_\beta \ ,$$

d'où $s \ge mk_0$, c'est-à-dire $n \ge m$. Par conséquent nous avons $n = m$, l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de P est maximal et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ est égal à sa partie principale.

Remarque 3.1. Nous déduisons de la démonstration du théorème que si P est un polynôme tel que $\mathcal{E}_P$ contienne une seule pseudo-valuation $\tilde\zeta$, toute sous-famille simple continue $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ de la famille admissible associée à $\tilde\zeta$ vérifie la conclusion du théorème 3.5 de [Va 2]: si ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, le développement de ϕ selon les puissances des polynômes ϕ_α est de la forme

$$\phi \ = \ \phi_\alpha^a + g_{a-1,\alpha}\phi_\alpha^{a-1} + \ldots + g_{0,\alpha} \ ,$$

avec $\mu_\alpha(\phi) = a\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand.

Nous supposons maintenant que le corps valué (K,ν) est hensélien, nous appelons K^{s} une cloture séparable de K et nous notons ν^{s} l'unique prolongement de ν à K^{s}. Soit P un polynôme irréductible unitaire séparable de $K[X]$ et soit L l'extension de K définie par P, $L = K[X]/(P)$. Nous choisissons une racine θ de $P(X)$ dans K^{s}, nous déterminons ainsi un plongement de L dans K^{s} et l'unique prolongement ζ de ν à L est la restriction de ν^{s} à L. La pseudo-valuation $\tilde\zeta$ de $\mathcal{E}_P$ associée à ζ est alors définie par $\tilde\zeta(f) = \nu^{\mathrm{s}}(f(\theta))$ pour tout polynôme $f(X)$.

Proposition 3.2. *Soit $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ une sous-famille simple continue de la famille admise $\mathcal{A}(\tilde\zeta)$ associée à l'unique pseudo-valuation $\tilde\zeta$ de $\mathcal{E}_P$, alors la famille de valeurs $\left(\gamma_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ associée à $\mathcal{C}$ est bornée.*

Preuve. Nous supposons que la famille $\left(\gamma_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ n'est pas bornée, et nous définissons la valeur ρ de $\bar\Gamma$ par

$$\rho \ = \ \max\left\{ \nu^{\mathrm{s}}\big(\sigma(\theta) - \theta\big) \ / \ \sigma \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{s}}/K) \text{ tel que } \sigma(\theta) \ne \theta \right\} \ .$$

Il existe alors β dans A tel que nous ayons $\gamma_\beta > r\rho$, où r est le degré des polynômes ϕ_α. Soient $y_1, \ldots, y_r$ les racines du polynôme unitaire ϕ_β dans K^{s}, nous avons alors $\phi_\beta(\theta) = \prod_{j=1}^{r}(\theta - y_j)$, d'où l'égalité $\nu^{\mathrm{s}}\big(\phi_\beta(\theta)\big) = \sum_{j=1}^{r} \nu^{\mathrm{s}}(\theta - y_j)$. Par définition $\nu^{\mathrm{s}}\big(\phi_\beta(\theta)\big)$ est égal à $\tilde{\zeta}(\phi_\beta) = \gamma_\beta$, par conséquent il existe j, $1 \leq j \leq r$, tel que nous ayons l'inégalité stricte $\nu^{\mathrm{s}}(\theta - y_j) > \rho$.

Nous déduisons alors du lemme de Krasner ([Ri] Corollaire 1, page 190) que le corps $K(\theta) = L$ est inclus dans le corps $K(y_j)$, ce qui est impossible car $[L : K] = \mathrm{deg}P > \mathrm{deg}\phi_\beta = r \geq [K(y_j) : K]$.

References

[McL 1] S. MacLane: A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.

[McL 2] S. MacLane: A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.

[Ri] P. Ribenboim: *Théorie des valuations*, Les Presses Universitaires de Montréal, 1964.

[Va 1] M. Vaquié: Extension d'une valuation, www.math.jussieu.fr/~ vaquie /prepubli/extension.ps

[Va 2] M. Vaquié: Famille admise associée à une valuation de $K[x]$, à paraître dans *Séminaires et Congrès*.

[Va 3] M. Vaquié: Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$.

[Va 4] M. Vaquié: Valuations, dans *Resolution of Singularities*, Progr. in math. 181, 2000.